

2021

Réviser son bac avec *Le Monde*

SPÉCIALITÉ - TERMINALE

MATHÉMATIQUES

NOUVEAU PROGRAMME

Un cahier spécial de
16 pages pour se tester
+
Une carte mentale
pour bien retenir

L'ESSENTIEL DU COURS

LES SUJETS INÉDITS

LES ARTICLES DU MONDE

LES CONSEILS DE RÉVISION


rue des écoles

Réviser son bac avec *Le Monde*

TERMINALE

MATHÉMATIQUES

Une réalisation de  rue des écoles

**NOUVEAU
PROGRAMME**

Un cahier spécial de
16 pages pour se tester

+
Une carte mentale
pour bien retenir

Avec la collaboration de :

Lilian Berrier
Aurélic Cronier
Jean Delautre
Stéphane Piat
Claudie Libersa

En partenariat avec



L'un des objectifs principaux de la spécialité est de développer chez vous un regard positif sur les mathématiques et d'exploiter au maximum vos capacités afin de résoudre des problèmes concrets et stimulants nécessitant des mathématiques théoriques. Vous devez vous entraîner à chercher, essayer des pistes et prendre le risque de vous tromper. Il s'agit d'apprendre pendant la première et la terminale que l'erreur est bénéfique, lorsqu'on l'analyse et qu'on en comprend l'origine. En effet, c'est ce travail sur l'erreur qui participe à la construction des apprentissages futurs. Les problèmes proposés peuvent concerner des thèmes internes aux mathématiques, notamment pour les exercices de base. Mais ils peuvent également provenir de l'histoire des mathématiques, être en lien avec d'autres disciplines ou encore avec le monde réel. Il faut donc que vous appreniez à en extraire les informations mathématiques pour les résoudre, avant d'exploiter la réponse obtenue dans la situation proposée. Une partie appelée « histoire des mathématiques » met en relation, pour chaque thème, les notions théoriques abordées avec le monde qui nous entoure, en s'appuyant parfois sur l'étude de textes historiques.

Le programme est composé de quatre grandes parties : « algèbre et géométrie », « analyse », « probabilités » et « algorithmique et programmation ». Bien que chaque partie soit séparée, il existe des liens directs entre chacune. Parmi les différentes activités qui sont proposées, la réalisation de démonstrations (dont certaines sont notées en exemple dans le cours) est une composante fondamentale. Le programme propose également plusieurs approfondissements possibles à chaque notion. Ils ne sont pas obligatoires mais permettent une différenciation dans les apprentissages et offrent des pistes éventuelles pour l'épreuve orale terminale.

Cet ouvrage, constitué de fiches de cours, de sujets corrigés et d'articles du *Monde*, a été conçu pour vous préparer efficacement au baccalauréat. À chaque chapitre correspond un cours de deux pages illustrées, complétées de zooms qui permettent d'approfondir certains aspects. Des sujets corrigés sont également proposés pour s'entraîner. Les articles du *Monde* qui accompagnent chaque chapitre permettent de mettre le cours en perspective avec un sujet d'actualité, ou en résonance avec la réflexion de spécialistes de la question. Ils permettent de faire ressortir les grands enjeux du programme et donnent des références originales et précises, utilisables à l'écrit comme à l'épreuve du Grand oral. Un guide pratique ainsi qu'une carte mentale complète la liste des outils mis à votre disposition.

Message à destination des auteurs des textes figurant dans cet ouvrage ou de leurs ayants-droit : si malgré nos efforts, nous n'avons pas été en mesure de vous contacter afin de formaliser la cession des droits d'exploitation de votre œuvre, nous vous invitons à bien vouloir nous contacter à l'adresse bucquet@lemonde.fr.

En partenariat avec



Complétez vos révisions du bac sur www.assistancescolaire.com :
méthodologie, fiches, exercices, sujets d'annales corrigés...
des outils gratuits et efficaces pour préparer l'examen.

Le Monde CAMPUS

A l'approche du baccalauréat 2021 et durant l'examen, Le Monde Campus vous propose des conseils de lectures et de révisions, des quiz, des directs avec des professeurs, ainsi que les sujets et corrigés des épreuves.

Toute l'année, nos journalistes racontent comment les étudiants et jeunes diplômés se forment, travaillent et changent la société.

Rendez-vous sur la rubrique **Lemonde.fr/campus** et dans *Le Monde* avec les pages « Le Monde Campus O21 » et les suppléments mensuels « Le Monde Campus ».



Le Monde
CAMPUS



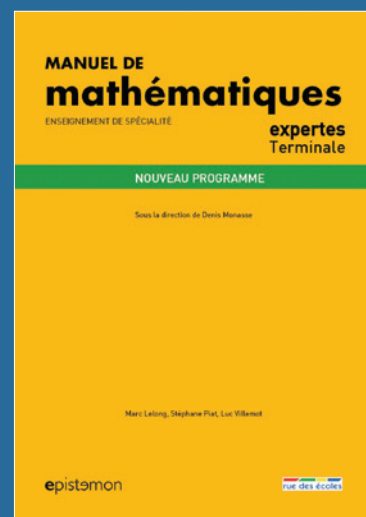
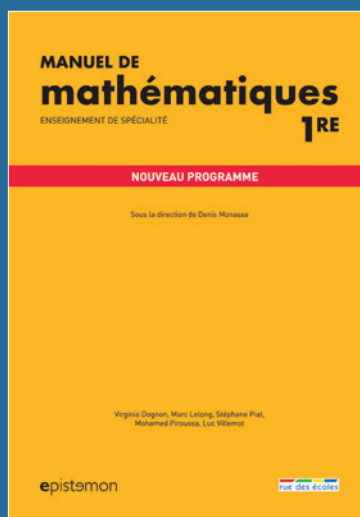
MANUELS DE MATHÉMATIQUES

NOUVEAU PROGRAMME

Des manuels de mathématiques inédits, conformes aux nouveaux programmes et accessibles à tous.

- Une place très importante donnée aux démonstrations, au raisonnement et faisant appel à la créativité.
- De nombreux approfondissements permettant aux élèves ou à leurs professeurs de choisir des thèmes d'étude complémentaires.
- Une annexe dédiée à la programmation Python.

Cible : élèves de première et terminale
format : 17 x 24 cm | 368 pages | 19,50 €



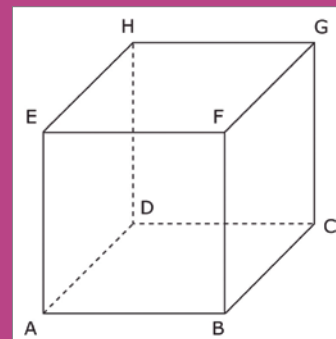
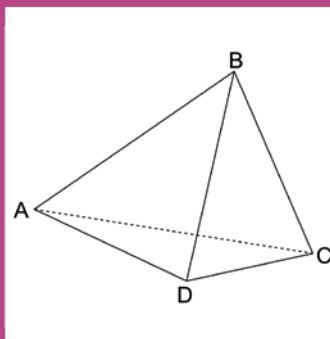
Retrouvez toutes nos collections pour préparer le baccalauréat sur
www.ruedesecoles.com

Algèbre et géométrie	p. 5
Chapitre 1 – Combinatoire et dénombrement	p. 6
Chapitre 2 – Manipulation des vecteurs, des droites et des plans de l'espace	p. 8
Chapitre 3 – Orthogonalité et distances dans l'espace	p. 10
Chapitre 4 – Représentations paramétriques et équations cartésiennes	p. 12
Analyse	p. 25
Chapitre 5 – Suites	p. 26
Chapitre 6 – Limites des fonctions	p. 28
Chapitre 7 – Compléments sur la dérivation	p. 30
Chapitre 8 – Continuité des fonctions d'une variable réelle	p. 32
Chapitre 9 – Fonction logarithme	p. 34
Chapitre 10 – Fonctions sinus et cosinus (<i>chapitre non évaluable à l'épreuve écrite</i>)	p. 36
Chapitre 11 – Primitives, équations différentielles	p. 38
Chapitre 12 – Calcul intégral (<i>chapitre non évaluable à l'épreuve écrite</i>)	p. 40
Probabilités	p. 61
Chapitre 13 – Succession d'épreuves indépendantes, schéma de Bernoulli	p. 62
Chapitre 14 – Sommes de variables aléatoires	p. 64
Chapitre 15 – Concentration, loi des grands nombres (<i>chapitre non évaluable à l'épreuve écrite</i>)	p. 66
Algorithmique/logique	p. 71
Chapitre 16 – Algorithmique/logique	p. 72
Les corrigés	p. 75
Le guide pratique	p. 91
La carte mentale	p. 94

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

```
def permutation1(liste):  
    shuffle(liste)  
    return liste  
  
def permutation2(liste):  
    longueur = len(liste)  
    nouvelle = []  
    while liste != []:  
        a = randrange(0, len(liste))  
        nouvelle.append(liste[a])  
        liste.remove(liste[a])  
    return nouvelle
```

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1



Combinatoire et dénombrement

Que faut-il retenir sur les ensembles finis ?

Lorsque n est un entier naturel non nul, si $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont n ensembles finis deux à deux disjoints, on peut appliquer le principe additif : le nombre d'éléments de l'ensemble $E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n$ est égal à la somme du nombre d'éléments de chacun des ensembles $E_1, E_2, \dots, E_n$.

Exemples : Soient $E = \{A ; S ; P\}$ un ensemble fini contenant 3 éléments, et F l'ensemble fini des entiers de 5 (inclus) à 15 (inclus), contenant 11 éléments. Alors :

$E \cup F$ contient $3 + 11 = 14$ éléments, car E et F sont deux ensembles finis et disjoints.

Les parties de E sont : E (composé de 3 éléments) ; les sous-ensembles $\{A ; S\}$, $\{A ; P\}$ et $\{S ; P\}$, composés de 2 éléments chacun ; les sous-ensembles $\{A\}$, $\{S\}$ et $\{P\}$, composés de 1 élément chacun ; et l'ensemble vide.

Propriété : soit E un ensemble constitué de n éléments. Alors il existe 2^n parties distinctes de E .

Qu'est-ce qu'une p-liste ?

Exemples : Soit $E = \{A ; S ; P\}$. On définit : $F = (P ; S ; P ; P ; A)$. F est une 5-liste de E , c'est-à-dire une suite finie composée de 5 termes qui sont tous des éléments de E .

Soit $G =$. Alors $(3 ; 5)$ est une 2-liste de G (on dit aussi un **couple de G**). $(2018 ; 2019 ; 2020)$ est une 3-liste de G (on dit aussi un **triplet de G**). Et on a : $(3 ; 5) \neq (5 ; 3)$, car dans une p-liste, l'ordre dans lequel les éléments sont écrits est important (contrairement à un ensemble).

On dit que a est la première composante du couple $(a ; b)$, b la deuxième composante du couple. On dit que c est la troisième composante du triplet $(a ; b ; c)$.

Notation : Soient E un ensemble fini et p un entier naturel non nul. L'ensemble des p -listes d'éléments de E se note E^p . Avec cette notation, E^2 représente l'ensemble des couples d'éléments de E . On pose $E^1 = E$.

Propriété : Soit E un ensemble fini possédant n éléments, soit p . Le nombre de p -listes d'éléments de E est égal à n^p .

Exemples : Soit $E = \{A ; S ; P\}$. Le nombre de 5-listes d'éléments de E est égal à 3^5 , soit 243 5-listes différentes.

Pour composer un digicode, on utilise un clavier numérique contenant les dix chiffres 0, 1, ..., 9), ainsi que les lettres A et B. Un code correct pour entrer dans l'immeuble est composé de 6 éléments. Il y a 12^6 6-listes différentes pour un digicode. Cela représente presque trois millions de codes différents à essayer pour entrer dans l'immeuble si on ne connaît pas le bon !

Que faut-il savoir sur le produit cartésien ?

Exemples : Soient $E = \{A ; S ; P\}$, et F l'ensemble des entiers de 5 (inclus) à 15 (inclus). $(A ; 6)$ est un couple du produit cartésien $E \times F$. Soit $G =$. $(2018 ; 2019 ; 2020)$ est un triplet de G .

Lorsque n est un entier naturel non nul, si $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont n ensembles finis, on peut appliquer le **principe multiplicatif** : le nombre d'éléments du produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est égal au produit du nombre d'éléments des ensembles $E_1, E_2, \dots, E_n$.

Exemple : Soient E l'ensemble $\{R ; D ; V ; 10 ; 9 ; 8 ; 7 ; As\}$, et F l'ensemble $\{Coeur ; Carreau ; Pique ; Trèfle\}$. Alors le produit cartésien $E \times F$ est un jeu classique de 32 cartes.

Comment manipuler les arrangements ?

Exemples : Soit $E = \{s ; c ; o ; 1 ; a ; i ; r ; e\}$. (s, i, c) est un arrangement de trois éléments de E .

Soit F l'ensemble des entiers de 5 (inclus) à 15 (inclus). $(5, 10, 7, 6)$ est un arrangement de quatre éléments de F , alors que $(5, 10, 5, 6)$ n'est pas un arrangement de F , car 5 est écrit deux fois.

Propriété : Soit E un ensemble contenant n éléments, n étant un entier naturel non nul. Soit p un entier tel que $1 < p \leq n$. Le nombre d'arrangements de p éléments de E est égal à $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-(p-1))$.

Remarques :

- Le produit $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-(p-1))$ contient p facteurs.
- Lorsque $p=1$, il y a n arrangements de 1 élément (singleton) de E .

Comment manipuler les permutations ?

Exemple : Soit $E = \{s ; c ; o ; 1 ; a ; i ; r ; e\}$. (s, i, c, o, l, a, e, r) est une permutation de E , mais pas (s, i, c, o, l, a, e, c) car l'élément c est répété.

Propriété : Le nombre de permutations de E est égal à $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$.

Notation : le nombre $n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$ est noté $n!$ et se lit « factorielle n ».

Exemple : 7 invités sont autour d'une table. Il existe $7!$ plans de table différents, soit 5 040 possibilités.

Propriété : Soit E un ensemble contenant n éléments, n étant un entier naturel non nul. Soit p un entier tel que $1 < p \leq n$. Le nombre d'arrangements de p éléments de E est égal à $\frac{n!}{p!(n-p)!}$.

MOTS CLÉS

ENSEMBLE FINI

On dit que E est un ensemble fini si et seulement si on peut en compter les éléments.

PARTIE D'UN ENSEMBLE FINI E

Soit F un ensemble. On dit que F est une partie (ou un sous-ensemble) de E si et seulement si F est un ensemble dont tous les éléments sont des éléments de E .

P-LISTE

Soit E un ensemble fini, soit p un entier naturel non nul. Une p -liste (aussi appelé p -uplet) d'éléments de E est une suite finie de p éléments de E .

PRODUIT CARTÉSIEN

- Soient E et F deux ensembles. Le produit cartésien de E par F (noté $E \times F$) est l'ensemble de tous les couples dont la première composante appartient à E et la seconde à F .
- Soient n un entier naturel non nul et $E_1, E_2, \dots, E_n$ ensembles. Le

produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est l'ensemble de toutes les n -listes dont la première composante appartient à E_1 , la deuxième à E_2 , ..., et la n^{e} composante appartient à E_n . On a donc $E \times E = E^2$ et $E \times E \times E = E^3$.

ARRANGEMENT

Soit E un ensemble contenant n éléments, n entier naturel non nul. Soit p un entier tel que $1 \leq p \leq n$. Un arrangement de p éléments de E est une p -liste d'éléments de E distincts deux à deux.

PERMUTATION

Soit E un ensemble contenant n éléments, n entier naturel non nul. Une permutation de E est un arrangement contenant les n éléments de E .

COMBINAISON

Soit E un ensemble contenant n éléments, n entier naturel. Soit p un entier tel que $0 \leq p \leq n$. Une combinaison de p éléments de E est une partie de E contenant p éléments de E .

Programme : Voici un script en langage Python permettant de générer de manière aléatoire une permutation d'un ensemble entré sous la forme d'une liste.

```
def permutation1(liste):
    shuffle(liste)
    return liste

def permutation2(liste):
    longueur = len(liste)
    nouvelle = []
    while liste != []:
        a = randrange(0, len(liste))
        nouvelle.append(liste[a])
        liste.remove(liste[a])
    return nouvelle
```

Deux fonctions différentes sont proposées. Pour utiliser *shuffle* de la première fonction, il faut importer auparavant le module *random* à l'aide de la ligne : *from random import*.

Comment manipuler les combinaisons ?

Exemple : Soit $E = \{s; c; o; l; a; i; r; e\}$. $F = \{s, l, e\}$ est une combinaison de 3 éléments de E . $F = \{e, s, l\}$ en est également une. $\emptyset$ est la combinaison de zéro élément de E . E est la combinaison des 8 éléments de E .

Propriété : Soit E un ensemble contenant n éléments, n étant un entier naturel. Soit p un entier tel que $0 \leq p \leq n$. Le nombre de combinaisons de p éléments de E est égal à $\frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-(p-1))}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Notation : Ce nombre se note $\binom{n}{p}$ et se lit « p parmi n ». On dit aussi que c'est un coefficient binomial.

Remarque : $\binom{n}{p}$ est égal au nombre de chemins représentant « p succès » lors de n répétitions d'une même épreuve de Bernoulli.

Exemple : En Belgique, le Lotto propose de choisir une grille de 6 numéros compris entre 1 et 45. Il y a donc $\binom{45}{6} = \frac{45!}{6!(45-6)!}$ soit 8 145 060 grilles possibles !

Cas particuliers : Soit E possédant n éléments, n étant un entier naturel.

$\binom{n}{0} = 1$, car seul $\emptyset$ est une combinaison à 0 élément de E .

$\binom{n}{1} = n$, car les parties à 1 élément de E sont les n singletons formés par les n éléments de E .

$\binom{n}{n} = 1$, car seul E est une combinaison à n éléments de E .

$\binom{n}{n-1} = n$,

Propriétés : Symétrie : $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$.

Relation de Pascal : soit p un entier tel que $0 < p < n$, avec n entier naturel non nul :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

Démonstration de la relation de Pascal :

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!} + \frac{(n-1)!}{p!((n-1)-p)!}$$

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!}$$

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)(n-p-1)!} + \frac{(n-1)!}{p(p-1)!(n-p-1)!}$$

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p-1)!}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\frac{1}{n-p} + \frac{1}{p} \right) \\ \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p-1)!} \times \frac{p+n-p}{(n-p) \times p} \\ \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{(n-1)! \times n}{(p-1)! \times p \times (n-p-1)! \times (n-p)} \\ \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} \\ \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \binom{n}{p} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & 1 \\ & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Triangle de Pascal.

On retrouve dans ce triangle la valeur des nombres $\binom{n}{p}$ au niveau du p^{e} élément sur la n^{e} ligne (attention, la 1^{re} ligne est numérotée 0).

Par exemple : $\binom{4}{2} = 6$ et $\binom{4}{3} = 4$.

UN ARTICLE DU MONDE À CONSULTER

• Un éléphant, ça compte énormément p. 18
(Nathaniel Herzberg, *Le Monde* daté du 31.10.2018)

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Des propriétés arithmétiques du triangle de Pascal étaient présentes dans les travaux combinatoires des mathématiciens indiennes et chinoises.

- Entre 400 et 200 av. J.-C., en Inde, les jainistes introduisent les premiers concepts de cardinalité et de nombres transfinis, car ils sont persuadés que tous les nombres infinis ne sont pas égaux. L'école de Pingala parle déjà du système binaire et utilise le triangle

de Pascal, même si cette notion sera redécouverte plus tard.

- Au moins 200 ans av. J.-C., les Chinois ont développé une sorte de numération en système binaire et des techniques arithmétiques qui leur permettaient de faire des calculs d'astronomie déjà très élaborés ou des recherches de carrés magiques (qui peuvent être utilisés dans les échecs, les jeux de cartes ou encore les dominos).

- Le triangle de Pascal apparaît réellement pour la première fois au Moyen-Orient au xx^{e} siècle et en Chine au xii^{e} siècle. Il servait alors à développer la formule du binôme : $(a + b)^n$, ainsi qu'à généraliser à des degrés supérieurs à 2 la méthode d'extraction de la racine. Pendant l'Antiquité, les calculs de combinatoire étaient des moments

de prédilection lors des récréations mathématiques. La combinatoire est restée présente durant tous les siècles jusqu'aux arithméticiens du xix^{e} siècle (Lucas, Delannoy, etc.). Enfin, le développement de l'informatique et de l'intelligence artificielle s'est appuyé sur les « mathématiques discrètes » et les méthodes combinatoires pour exploiter ces nouvelles technologies au maximum.

Manipulation des vecteurs, droites et plans dans l'espace

L'étude des objets dans l'espace déjà abordée dans les classes antérieures se poursuit avec la caractérisation de droites et de plans par des relations vectorielles.

Que faut-il savoir sur les vecteurs dans l'espace ?

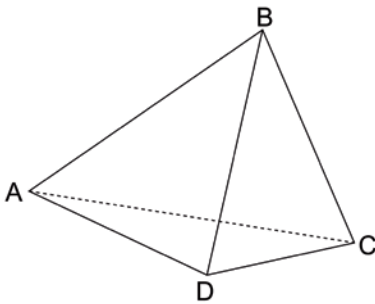
Toutes les opérations sur les vecteurs dans un plan se prolongent aux vecteurs dans l'espace.

Propriétés :

- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme. On note alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \vec{u}$. On dit alors que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des représentants du vecteur $\vec{u}$.
- Soient A un point et $\vec{u}$ un vecteur. Il existe un unique point M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

Exemple : Soit un pavé droit $ABCDEFGH$.
 • Le seul point M de l'espace vérifiant $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$ est le point D .

- $ABCD$ est un parallélogramme, car $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.



Exemple : Soit un tétraèdre $ABCD$. Avec la relation de Chasles, on a : $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$.
 On dit qu'un vecteur $\vec{u}$ peut être exprimé comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ si et seulement si il existe deux réels a et b tels que $\vec{u} = a\vec{v} + b\vec{w}$.

Exemple : Soit un pavé droit $ABCDEFGH$. Exprimons $\overrightarrow{AG}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{FA}$.

Avec la relation de Chasles, on peut écrire : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DG}$. Comme certains vecteurs du pavé droits sont égaux d'après la propriété du parallélogramme, on obtient : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AF}$.

Finalement, on obtient : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{FA}$.

Quelle est la caractérisation vectorielle des droites de l'espace ?

Propriétés : Soient A et B deux points distincts de l'espace.

- La droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires.
 - Tout vecteur (non nul) colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ est également un vecteur directeur de (AB) .
- On dit que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) . On dit aussi que $\overrightarrow{AB}$ dirige la droite (AB) .

Exemple : Soient $ABCD$ un tétraèdre et J le milieu de $[BC]$. Alors $\overrightarrow{BJ}$ est un vecteur directeur de la droite (BC) .

Caractérisation vectorielle d'une droite :

Soient A et B deux points distincts de l'espace. M appartient à (AB) si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$.

Remarque : La donnée d'un point et d'un vecteur directeur suffit à caractériser une droite.

Quelle est la caractérisation vectorielle des plans dans l'espace ?

Caractérisation vectorielle d'un plan :

Soient A , B et C trois points non alignés de l'espace. Un point M appartient au plan (ABC) si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est égal à une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. On dit alors que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs directeurs du plan (ABC) .

Exemples :

- Soit $ABCDEFGH$ un cube de centre O . Le point O appartient au plan (AFG) . En effet, on a $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AG}$.

- Soit $ABCD$ un tétraèdre. Soit E le point de l'espace qui vérifie $\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{BE} + 5\overrightarrow{CE}$. Montrons que E appartient bien au plan (ABC) .

$$\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{BE} + 5\overrightarrow{CE} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = 5(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}) + 5(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE}),$$

en utilisant la relation de Chasles.

$$\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{BE} + 5\overrightarrow{CE} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{BA} + 5\overrightarrow{AE} + 5\overrightarrow{CA} + 5\overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{BE} + 5\overrightarrow{CE} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} - 5\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{BA} + 5\overrightarrow{CA}$$

$$\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{BE} + 5\overrightarrow{CE} \Leftrightarrow -5\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{BA} + 5\overrightarrow{CA}$$

$$\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{BE} + 5\overrightarrow{CE} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{5}{-5}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{-5}\overrightarrow{CA}$$

$$\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{BE} + 5\overrightarrow{CE} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{BE} + 5\overrightarrow{CE} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$$

Ainsi E appartient au plan (ABC) .

Remarque : La donnée d'un point et de deux vecteurs directeurs (non colinéaires) suffit à caractériser un plan.

MOTS CLÉS

VECTEUR $\overrightarrow{AB}$

Soient A et B deux points de l'espace. Au couple de points (A, B) , on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$ qui caractérise la translation qui transforme A en B .

RÈGLE DU PARALLÉLOGRAMME

$ABDC$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

RELATION DE CHASLES

Pour tous points A , B et C de l'espace, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

VECTEURS COLINÉAIRES

Deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

VECTEUR DIRECTEUR

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si $\vec{u}$ est non nul et la droite $\mathcal{D}$ est parallèle à la droite (AB) .

VECTEURS COPLANAIRES

Des vecteurs de l'espace sont coplanaires si et seulement si leurs représentants de même origine A ont

leurs extrémités dans un même plan contenant le point A .

DROITES COPLANAIRES

Deux droites sont coplanaires si elles appartiennent à un même plan. Deux droites distinctes et coplanaires sont donc soit sécantes, soit strictement parallèles.

BASE DE L'ESPACE

Une base de l'espace est une famille de trois vecteurs non coplanaires.

REPÈRE DE L'ESPACE

Un repère de l'espace est formé d'un point O et d'un triplet de vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ non coplanaires. On note $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un tel repère.

Que faut-il savoir sur la coplanarité ?

Des vecteurs coplanaires sont dits linéairement dépendants. On dit aussi qu'ils forment une famille liée.

Trois vecteurs non nuls u , v et w tels que $u = AB$, $v = AC$ et $w = AD$ sont coplanaires si et seulement si A , B , C et D appartiennent au même plan (ABC) . On dit alors que les points A , B , C et D sont coplanaires.

Exemple : Soit $ABCDEFGH$ un pavé droit de centre O . On peut montrer que GE , DH et OA sont coplanaires.

Propriétés : Soient u , v et w , trois vecteurs tels que u et v ne sont pas colinéaires.

- u , v et w sont coplanaires si et seulement si w est égal à une combinaison linéaire de u et v .

- u , v et w sont coplanaires si et seulement s'il existe trois réels a , b et c **non tous nuls** tels que $au + bv + cw = \vec{0}$.

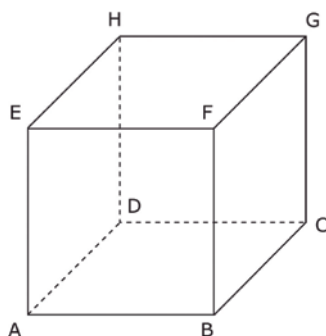
- $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ **ne sont pas** coplanaires si et seulement si $a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$ implique $a = b = c = 0$. Des vecteurs non coplanaires sont dits linéairement indépendants. On dit aussi qu'ils forment une famille libre.

Exemple : Soit $ABCD$ un tétraèdre avec I milieu de $[AB]$. Soient E tel que $AE = \frac{2}{3}AC$, F tel que $AF = \frac{2}{3}AD$ et G tel que GCB parallélogramme. On peut montrer que IE , IF et IG sont coplanaires.

Comment caractériser une base et un repère dans l'espace ?

Propriété : Soient u , v et w , trois vecteurs non colinéaires de l'espace. Quel que soit le vecteur t de l'espace, il est égal à une unique combinaison linéaire des vecteurs u , v et w .

Exemples : Soit $ABCDEFGH$ un cube.



- On peut exprimer de manière unique BH en fonction des vecteurs AB , AD et AE , car ces trois vecteurs ne sont pas colinéaires. En effet : $BH = BC + CG + GH = AD + AE - AB$.

- Soit I le milieu de $[AB]$. Le triplet (AI, AD, AE) est une base de l'espace et $(A; AI, AD, AE)$ est un repère de l'espace.

Comment étudier la position relative de deux droites dans l'espace ?

On étudie la position relative de deux droites dans l'espace : la droite $\mathcal{D}$ passant par A , de vecteur directeur u , et la droite $\mathcal{D}'$ passant par A' , de vecteur directeur u' . Il suffit d'étudier leurs **vecteurs directeurs**.

Si u et u' sont **colinéaires**, alors les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles. Deux cas sont alors possibles :

- si A appartient à $\mathcal{D}'$, alors les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont confondues ;
- si A n'appartient pas à $\mathcal{D}'$, alors les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont strictement parallèles : leur intersection est vide.

Si u et u' **ne sont pas colinéaires**, alors les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont soit sécantes (leur

intersection est un point), soit non coplanaires (leur intersection est vide).

Comment étudier la position relative d'une droite et d'un plan ?

Propriété : Soit $\mathcal{P}$ un plan de vecteurs directeurs u et v (non colinéaires), et $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur w . $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs u , v et w sont coplanaires.

Remarque : Si une droite et un plan ne sont pas parallèles, alors ils sont sécants en un point unique.

Cas particulier : Dans le cas où $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont parallèles, la droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$ si et seulement si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ admettent au moins un point commun.

Comment étudier la position relative de deux plans ?

Propriété : Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont parallèles si et seulement si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ admettent un même couple de vecteurs directeurs (non colinéaires).

Remarque : Deux plans non parallèles sont sécants en une droite.

Cas particulier : Les deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont confondus si et seulement si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont parallèles et possèdent au moins un point commun.

UN ARTICLE DU MONDE À CONSULTER

• Bataille d'astronomes autour d'une hypothétique planète p. 19
(Pierre Barthélémy, *Le Monde* daté du 25.07.2012)

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Les concepts sous-jacents à la notion de vecteur apparaissent comme modèles pour la physique dynamique longtemps avant qu'ils ne soient formalisés mathématiquement.

On trouve le concept de force dans les travaux d'Archimède (200 ans av. J.-C.), car il évoque le poids des corps sans pouvoir expliquer plus précisément l'hypothèse scientifique cachée derrière. La notion de force apparaît plus implicitement dans les travaux de Stevin au XVI^e siècle et est finalement formalisée par Newton au XVII^e siècle. C'est le premier qui

donne une définition, encore utilisée aujourd'hui, qui permet de distinguer les notions de force et de vitesse. Ces deux notions sont encore présentes dans les calculs géométriques de Leibniz.

Au XIX^e siècle, la notion de vecteur va finalement émerger comme objet algébrique et géométrique, comme transformation, ou encore comme outil de repérage. Hamilton construit les vecteurs par une approche algébrique. Grassmann propose dans sa théorie des forces et des marées, en 1839, une approche géométrique

qui étend à l'espace la notion de vecteurs et lui associe des règles de calcul algébrique (notamment un « produit linéaire » qui deviendra plus tard notre produit scalaire).

Enfin, des auteurs proches des mathématiques comme de la physique tels que Maxwell, Gibbs, Heaviside ou Peano, ont dégagé à la fin du XIX^e siècle de nouveaux principes du calcul vectoriel à trois dimensions ou plus, lui donnant une dimension dynamique tout en établissant une nouvelle structure : les espaces vectoriels.



Giuseppe Peano.

Orthogonalité et distances dans l'espace

L'étude de la position relative de droites et de plans dans l'espace se poursuit, et on étend le produit scalaire à l'espace en conservant les propriétés du produit scalaire dans le plan.

Dans tout le chapitre, on munit l'espace du repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Quelles sont les propriétés des coordonnées d'un vecteur dans l'espace ?

Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de réels (x, y, z) tels que $OM = xi + yj + zk$.

Pour tout vecteur u de l'espace, il existe un unique triplet de réels (x, y, z) tels que $u = xi + yj + zk$.

Propriétés :

Soient $u(a, b, c)$, $v(d, e, f)$ deux vecteurs de l'espace, et k un réel.

- La somme des deux vecteurs u et v se note : $u + v(a + d, b + e, c + f)$.

- Le produit du vecteur u par le scalaire k se note : $ku(ka, kb, kc)$.

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ deux points de l'espace.

- Le vecteur AB a pour coordonnées $(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$.

- Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

Exemple : Soit le pavé droit ABCDEFGH. $(A; AB, AD, AE)$ est un repère de l'espace. On a, par exemple, $A(0, 0, 0)$; $C(1, 1, 0)$; $G(1, 1, 1)$. Le vecteur AF a pour coordonnées $(1, 0, 1)$. Le milieu de $[FG]$ a pour coordonnées $(1; 0,5; 1)$.

Quelles sont les propriétés du produit scalaire ?

Soient u et v deux vecteurs de l'espace, et les points A, B et C tels que $\vec{u} = \vec{AB}$ et $\vec{v} = \vec{AC}$, avec les points A, B et C coplanaires. Le produit scalaire de u et v (noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$) est le réel $AB \cdot AC$.

Propriétés : On munit l'espace d'un repère orthonormé.

- Soient $u(a, b, c)$ et $v(d, e, f)$ deux vecteurs de l'espace, alors : $u \cdot v = ad + be + cf$.

- Soient deux vecteurs u et v . On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$.

- On obtient alors également : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$.

Exemples : Soit un cube ABCDEFGH et I le milieu de $[EF]$. $(A; AB, AD, AE)$ est un repère orthonormé de l'espace.

On a, par exemple, $I(0,5; 0; 1)$, $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$ et $H(0, 1, 1)$.

- On a alors : $AI(0,5; 0; 1)$ et

- On peut calculer $AI \cdot BH = 0,5 \times (-1) + 0 \times 1 + 1 \times 1 = 0,5$.

On a : $AB(1, 0, 0)$ et $GC(0, 0, -1)$. Alors

$\|\vec{AB}\| = 1$ et $\|\vec{GC}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1$.

- On a alors $AB \cdot GC = EB$ et $\|\vec{EB}\| = \sqrt{2}$.

- On peut donc calculer $\vec{AB} \cdot \vec{GC} = \frac{1}{2}(\|\vec{AB} + \vec{GC}\|^2 - \|\vec{AB}\|^2 - \|\vec{GC}\|^2) = \frac{1}{2}(\sqrt{2}^2 - 1^2 - 1^2) = 0$.

Comment caractériser l'orthogonalité entre deux vecteurs ?

Propriétés : On munit l'espace d'un repère orthonormé.

Soient u et v deux vecteurs de l'espace, et trois points A, B et C tels que $u = \vec{AB}$ et $v = \vec{AC}$.

On dit que les vecteurs u et v sont orthogonaux si et seulement si :

- les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires lorsque les points A, B et C sont dans le même plan ;

- le produit scalaire entre les vecteurs u et v est nul : $u \cdot v = 0$.

Exemple : Soit un cube ABCDEFGH.

MOTS CLÉS

COORDONNÉES D'UN POINT M

Si M est un point de l'espace tel que $OM = xi + yj + zk$, on dit que (x, y, z) sont les coordonnées de ce point M dans $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note $M(x, y, z)$.

Alors x est l'abscisse de M, y est l'ordonnée de M et z est la cote de M.

COORDONNÉES D'UN VECTEUR $\vec{u}$

Si $\vec{u}$ est un vecteur de l'espace tel que $u = xi + yj + zk$, on dit que (x, y, z) sont les coordonnées de ce vecteur $\vec{u}$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note $\vec{u}(x, y, z)$.

NORME D'UN VECTEUR

En munissant l'espace de la norme euclidienne usuelle, la norme d'un vecteur $\vec{u}(x, y, z)$ dans l'espace est égale au réel $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. On note ce réel $\|\vec{u}\|$.

VECTEUR UNITAIRE

Un vecteur dont la norme est égale à 1 est dit unitaire.

BASE ORTHONORMÉE

On dit que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée de l'espace si et seulement si les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont unitaires et orthogonaux deux à deux.

REPÈRE ORTHONORMÉ

Si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormée et O un point de l'espace, alors $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace.

VECTEURS ORTHOGONAUX

On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

DISTANCE ENTRE DEUX POINTS

Soient $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$, deux points de l'espace.

La distance entre A et B est égale à

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

VECTEUR NORMAL

On appelle vecteur normal à un plan $\mathcal{P}$ tout vecteur directeur d'une droite orthogonale à $\mathcal{P}$.

PROJECTION ORTHOGONALE D'UN POINT SUR UNE DROITE

Soit A un point de l'espace et $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$. Le projeté orthogonal du point A sur la droite $\mathcal{D}$ est l'unique point H appartenant à la droite $\mathcal{D}$, tel que les droites $\mathcal{D}$ et (AH) soient perpendiculaires.

- Les vecteurs AB et BF sont orthogonaux, car les droites (AB) et (BF) sont perpendiculaires et dans le même plan (ABF).
- Les vecteurs AB et GC sont également orthogonaux, car $\overrightarrow{AB} (1, 0, 0)$ et $\overrightarrow{GC} (0, 0, -1)$. Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{GC} = 1 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times (-1) = 0$.

Comment caractériser la distance entre deux points dans l'espace ?

Propriété : La distance AB entre les deux points A à B est égale à $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Exemple : Soit ABCD un tétraèdre et I milieu de [BC]. Soit $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ un repère orthonormé de l'espace.

On a $D(0, 0, 1)$ et $I(0,5; 0,5; 0)$. Ainsi

$$DI = \sqrt{(0,5-0)^2 + (0,5-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{1,5}.$$

Que faut-il retenir sur les mesures d'angle ?

Propriété : Soient u et v deux vecteurs de l'espace, et les points A, B et C tels que $u = \overrightarrow{AB}$ et $v = \overrightarrow{AC}$.

Le produit scalaire des deux vecteurs u et v est aussi donné par la formule : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{BAC})$.

Exemple : Soit un cube ABCDEFGH et I milieu de [BF]. $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé de l'espace.

$\overrightarrow{AB}(1; 0; 0,5)$ et $\overrightarrow{AI}(1; 0; 0,5)$. Alors $\|\overrightarrow{AB}\| = 1$ et $\|\overrightarrow{AI}\| = \sqrt{1,25}$.

D'une part, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = 1 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0,5 = 1$.

D'autre part, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = 1 \times \sqrt{1,25} \times \cos(\widehat{IAB})$.

Alors $1 \times \sqrt{1,25} \times \cos(\widehat{IAB}) = 1$, d'où

$$\cos(\widehat{IAB}) = \frac{1}{\sqrt{1,25}} \text{ et } \widehat{IAB} \approx 26,57^\circ.$$

Que faut-il retenir sur la notion de vecteur normal ?

Propriété : Un vecteur normal à un plan est un vecteur non nul. Un vecteur non nul est un vecteur normal d'un plan $\mathcal{P}$ de vecteurs directeurs u et v si et seulement s'il est orthogonal aux vecteurs u et v .

Exemple : La notion de vecteur normal permet d'interpréter vectoriellement l'orthogonalité de droites et de plans. Elle permet aussi de déterminer une équation cartésienne d'un plan dans un repère orthonormal de l'espace, en s'appuyant sur la propriété suivante : le plan passant par A et de vecteur normal n est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot n = 0$.

Comment caractériser l'intersection entre une droite et un plan ?

Propriété : On étudie la position relative d'une droite $\mathcal{D}$ passant par le point A, de vecteur directeur u et d'un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal n . Si u et n sont orthogonaux, alors la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

- Si, en outre, le point A appartient au plan $\mathcal{P}$, alors la droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.
- Sinon, la droite $\mathcal{D}$ est strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$, et leur intersection est vide.

Si u et n ne sont pas orthogonaux, alors la droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants, et leur intersection est un point.

- Si, par ailleurs, u et n sont colinéaires, alors la droite $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

Comment caractériser l'intersection de deux plans ?

Propriété : On considère deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de vecteurs normaux respectifs n et n' .

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles si et seulement si n et n' sont colinéaires.

- Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus, et leur intersection est un plan.
 - Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont strictement parallèles, et leur intersection est vide.
- Sinon $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants et leur intersection est une droite.

Comment caractériser la projection orthogonale dans l'espace ?

Propriété : On munit l'espace d'un repère orthonormé. Soient A, B et C trois points de l'espace et H le projeté orthogonal du point B sur la droite (AC).

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}$ si les vecteurs AB et AH ont le même sens.

- $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC}$ si les vecteurs AB et AH sont de sens contraires.

Exemple : Soit un cube ABCDEFGH et I milieu de [BF]. $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé de l'espace.

On a $I(1; 0; 0,5)$, $A(0, 0, 0)$ et $B(1, 0, 0)$. De plus, on a : $AB = 1$ et $AI = \sqrt{1,25}$.

Le projeté orthogonal de I sur la droite (AB) est le point B.

Donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \times 1 = 1$.

Conséquence : Soit A un point de l'espace et H le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$ de vecteur directeur u . Alors u et $\overrightarrow{AH}$ sont orthogonaux, et donc $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$.

UN ARTICLE DU MONDE À CONSULTER

- Mécaniques du flux et du reflux p. 20 (Yvonne Rebeyrol, *Le Monde* daté du 28.01.1987)

ZOOM SUR...

PROJECTION ORTHOGONALE D'UN POINT SUR UN PLAN

Soit A un point de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan. Le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$ est l'unique point H appartenant au plan $\mathcal{P}$ tel que la droite (AH) soit perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

LES PROPRIÉTÉS DU PRODUIT SCALAIRE

Propriété : Formule principale (formule la plus utilisée géométriquement)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace, et les points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est aussi donné par la formule : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{BAC})$.

Propriétés : Soient u , v et w trois vecteurs de l'espace, et k un réel.

- **Symétrie** du produit scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

- **Bilinéarité** du produit scalaire : $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$.

- **Distributivité** du produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}.$$

- Le **carré scalaire** du vecteur $\vec{u}$ est :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2.$$

Propriétés : Formules de polarisation

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

Propriétés : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

- Si l'un des deux vecteurs est nul, alors leur produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est égal à 0.

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est égal à 0.

- S'ils sont non nuls et colinéaires, alors : $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

Propriétés géométriques : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

- La droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}$ et la droite $\mathcal{D}'$ de vecteur directeur $\vec{v}$ sont orthogonales si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

- La sphère de diamètre [AB] est l'ensemble des points M de l'espace tels que : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Représentations paramétriques et équations cartésiennes

Dans tout le chapitre, on munit l'espace du repère $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

Comment peut-on exprimer la représentation paramétrique d'une droite ?

Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace contenant un point A de coordonnées (x_A, y_A, z_A) et de vecteur directeur u de coordonnées (a, b, c) . On peut caractériser cette droite grâce à une **représentation paramétrique**.
Caractérisation de la droite $\mathcal{D}$ par un **système d'équations paramétriques** :

$$\begin{cases} x = x_A + ka \\ y = y_A + kb, \text{ avec } k \\ z = z_A + kc \end{cases}$$

Exemple 1 :

Soit un cube ABCDEFGH et I milieu de [EF].
 $(A; AB, AD, AE)$ est un repère de l'espace. On a $I(0,5; 0; 1)$ et $B(1, 0, 0)$, donc $BI(-0,5; 0; 1)$.
La droite (BI) est donc définie par le système

$$\text{suivant : } \begin{cases} x = 1 - 0,5k \\ y = 0 + 0k, \text{ avec } k \\ z = 0 + 1k \end{cases}$$

Exemple 2 :

Soit $\mathcal{D}$ la droite définie par :

$$\begin{cases} x = 1 + 4k \\ y = 2 + 5k \\ z = 3 + 6k \end{cases}$$

avec k .

La droite $\mathcal{D}$ passe par le point $A(1, 2, 3)$ et admet pour vecteur directeur $u(4, 5, 6)$.

Comment peut-on exprimer l'équation cartésienne d'un plan ?

On peut déterminer une **équation cartésienne d'un plan** en s'appuyant sur la propriété énoncée ci-dessous :

- Soient a, b, c trois réels non tous nuls, l'ensemble des points M de l'espace de coordonnées (x, y, z) tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal n de coordonnées (a, b, c) .

- Réciproquement, tout plan de vecteur normal $\vec{n}$ de coordonnées (a, b, c) admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

Pour déterminer une équation cartésienne d'un plan passant par A et de vecteur normal n , on peut :

- donner la forme générale de l'équation : $ax + by + cz + d = 0$;
- remplacer les coefficients a, b, c par les coordonnées du vecteur n ;
- déterminer ensuite la valeur de d à l'aide des coordonnées du point A.

Exemple 1 : Soit ABCD un tétraèdre et I milieu de [BC]. Soit $(A; AB, AC, AD)$ un repère de l'espace.

1. Vérifier que $n(1, -1, 0)$ est un vecteur normal au plan (AID).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (AID).

1. On a $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$ et $D(0, 0,$

1). Donc $I(0,5; 0,5; 0)$, $AI(0,5; 0,5; 0)$ et $AD(0, 0, 1)$. On a bien $n \cdot AI = n \cdot AD = 0$.

2. Grâce au vecteur normal $n(1, -1, 0)$, on peut écrire pour le plan (AID) : $1 \times x + (-1) \times y + 0 \times z + d = 0$.

De plus, I appartient au plan (AID) donc : $1 \times x_I + (-1) \times y_I + 0 \times z_I + d = 0$.

Ainsi, on obtient : $1 \times 0,5 + (-1) \times 0,5 + 0 \times 0 + d = 0$, soit $d = 0$.

Le plan (AID) a donc pour équation cartésienne : $x - y = 0$.

Exemple 2 : Soit le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x + 2y + 3z + 4 = 0$.

Grâce à cette équation, on sait qu'un vecteur normal de $\mathcal{P}$ est $n(1, 2, 3)$.

De plus, ce plan passe notamment par le point $A(-1, 0, -1)$, car $-1 + 2 \times 0 + 3 \times (-1) + 4 = 0$.

Comment peut-on exprimer les coordonnées du projeté orthogonal ?

Propriété : On munit le plan d'un repère orthonormé.

Soit (AB) une droite du plan et C un point du plan n'appartenant pas à (AB).

Le projeté orthogonal H du point C sur la droite (AB) est l'unique point du plan vérifiant : $AH \cdot AB = AC \cdot AB$.

Exemple 1 : Soit ABCD un carré et I son centre. On cherche à déterminer les coordonnées de H le projeté orthogonal de I sur la droite (AB).

On utilise le repère $(A; AB, AD)$ qui est orthonormé.

D'après la propriété, on a l'égalité (E) : $AI \cdot AB = AH \cdot AB$.

Or H appartient à (AB), donc il existe un unique réel a tel que : $AH = a \cdot AB$.

Alors : (E) $AI \cdot AB = a \cdot AB \cdot AB$. Or $AB \neq 0$

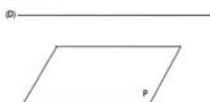
donc $AB \cdot AB \neq 0$ et (E) $\Leftrightarrow a = \frac{AI \cdot AB}{AB \cdot AB}$.

ZOOM SUR...

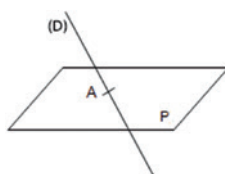
LES INTERSECTIONS DE PLANS ET DE DROITES DANS L'ESPACE

Récapitulatif des différents cas pour $\mathcal{P} \cap \mathcal{D}$ (intersection d'une droite et d'un plan) :

- $\mathcal{P} \cap \mathcal{D} = \emptyset$: aucun point commun entre le plan $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}$.
Alors : $S = \emptyset$, le système n'admet aucune solution.



- $\mathcal{P} \cap \mathcal{D} = \{A\}$: un seul point d'intersection A.
Un seul triplet pour solution : c'est le triplet des coordonnées du point A.

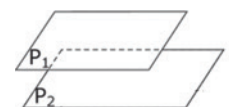


- $\mathcal{P} \cap \mathcal{D} = \mathcal{D}$: l'intersection est la droite $\mathcal{D}$.
La droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

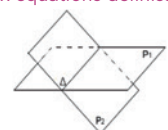


Récapitulatif des différents cas pour $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ (intersection de deux plans) :

- $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \emptyset$: aucun point commun entre les deux plans.
Alors : $S = \emptyset$, le système n'admet aucune solution.



- $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \Delta$: l'intersection des deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est la droite Δ .
Il existe une infinité de solutions : tous les triplets qui sont solutions des deux équations définissant Δ .



Or $A(0,0), B(1,0)$ et $I(0,5;0,5)$. Donc $AI \cdot AB = 0,5 \times 1 + 0,5 \times 0 = 0,5$ et $AB \cdot AB = 1$. Alors, on obtient : $a = 0,5$, et donc : $AH = 0,5AB$, soit $H(0,5;0)$.

Exemple 2 : Soit ABCDEFGH un cube et I le centre du cube.

On cherche à déterminer les coordonnées de H le projeté orthogonal de I sur le plan (ABC). On utilise le repère orthonormé $(A; AB, AD, AE)$, et la base orthonormée (AB, AD) du plan (ABC).

D'après la propriété, on a : $AI \cdot AB = AH \cdot AB$ et $AI \cdot AD = AH \cdot AD$.

Or il existe un unique couple de réels b et c tels que : $AH = bAB + cAD$.

Alors : $AI \cdot AB = (bAB + cAD) \cdot AB$

$= b \cdot AB \cdot AB + c \cdot AD \cdot AB$,

et $AI \cdot AD = (bAB + cAD) \cdot AD$

$= b \cdot AB \cdot AD + c \cdot AD \cdot AD$.

Or $A(0,0,0), B(1,0,0), C(1,1,0), D(0,1,0)$ et $I(0,5;0,5;0,5)$.

Donc : $AB \cdot AB = 1, AD \cdot AB = 0$,

$AI \cdot AB = 0,5 \times 1 + 0,5 \times 0 + 0,5 \times 0 = 0,5$,

$AD \cdot AD = 1$ et $AI \cdot AD = 0,5$.

On a donc le système suivant à résoudre :

$$\begin{cases} 0,5 = b \times 1 + c \times 0 \\ 0,5 = b \times 0 + c \times 1 \end{cases}$$

Ainsi, on obtient : $b = c = 0,5$.

Donc $AH = 0,5AB + 0,5AD$, soit $H(0,5;0,5;0)$.

Que faut-il retenir sur les systèmes d'équations linéaires ?

Concernant l'intersection de deux plans :

Propriété : Soient $ax + by + cz + d = 0$ et $ax + by + cz + d' = 0$ les équations cartésiennes respectives de deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. Pour

étudier l'intersection de ces deux plans, on résout le système :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

Soit ce système n'a pas de solutions, soit il en a une infinité.

Une **droite de l'espace** peut donc être représentée par un **système de deux équations linéaires** composé des équations cartésiennes de deux plans sécants selon cette droite (Remarque : ce système n'est pas unique).

Exemple : Soit $\mathcal{P} : x + 2y + 3z + 4 = 0$ et $\mathcal{Q} : 5x + 6y + 7z + 8 = 0$.

On remarque que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants en une droite $\mathcal{D}$ car leurs vecteurs normaux $n(1,2,3)$ et $n'(5,6,7)$ ne sont pas colinéaires. Déterminons une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4 = 0 \\ 5x + 6y + 7z + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 3z - 4 \\ 5(-2y - 3z - 4) + 6y + 7z + 8 = 0 \end{cases}$$

$$\text{D'où } \begin{cases} x = -2y - 3z - 4 \\ -10y - 15z - 20 + 6y + 7z + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y - 3z - 4 \\ -4y - 8z - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x = -2y - 3z - 4 \\ y = 2z + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2(2z + 3) - 3z - 4 \\ y = 2z + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7z - 10 \\ y = 2z + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -7z - 10 \\ y = 2z + 3 \end{cases}$$

En posant $z = k$, on obtient finalement le

$$\text{système : } \begin{cases} x = -10 - 7k \\ y = 3 + 2k \\ z = 0 + 1k \end{cases} \text{ avec } k \text{ un réel.}$$

Donc $\mathcal{D}$ passe par le point $H(-10, 3, 0)$ et admet comme vecteur directeur le vecteur $u(-7, 2, 1)$.

Concernant l'intersection de trois plans :

On considère trois plans $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ de vecteurs normaux respectifs n, n' et n''

• Point de vue géométrique : $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ sont **parallèles** si et seulement si n, n' et n'' sont colinéaires.

• Deux cas sont alors possibles : soit $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ sont confondus et leur intersection est un plan ; soit $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ sont strictement parallèles et leur intersection est vide.

• Sinon $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$ sont **sécants** et leur intersection est soit une droite, soit un point.

• Point de vue algébrique :

• Soient $ax + by + cz + d = 0, ax + by + cz + d' = 0$ et $ax + by + cz + d'' = 0$, les équations cartésiennes respectives des plans $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}''$.

• Pour étudier l'intersection de ces trois plans, on résout le système :

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \\ a''x + b''y + c''z + d'' = 0 \end{cases}$$

• Ce système peut admettre soit aucune solution, soit une unique solution soit une infinité de solutions.

UN ARTICLE DU MONDE À CONSULTER

- Le big data, entre nombres et lumières p. 21 (Antoine Reverchon, *Le Monde* daté du 31.10.2015)

- $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_1$ (ou $\mathcal{P}_2$) : l'intersection des deux plans est l'un des deux plans.

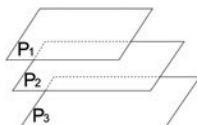
Les deux plans sont confondus.



Récapitulatif des différents cas pour $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3$ (intersection de trois plans) :

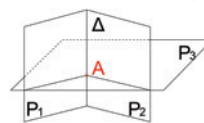
- $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \emptyset$: aucun point commun aux trois plans.

Alors : $S = \emptyset$, le système n'admet aucune solution.



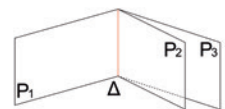
- $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \{A\}$: un seul point commun A.

Un seul triplet pour solution : c'est le triplet des coordonnées du point A.



- $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \Delta$: l'intersection de $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ et $\mathcal{P}_3$ est la droite Δ .

Il existe une infinité de solutions : tous les triplets qui sont solutions des deux équations définissant Δ .



- $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \cap \mathcal{P}_3 = \mathcal{P}_1$ (ou $\mathcal{P}_2$ ou $\mathcal{P}_3$) : l'intersection est l'un des trois plans. Les trois plans sont confondus.

Combinatoire et dénombrement

Sujet 1

Lors d'une course au trot attelé, le départ à l'autostart permet aux chevaux de se lancer à la bonne allure. Les chevaux sont placés sur deux lignes de 9 chevaux (au maximum). Il y a 10 chevaux au départ de la course.

Les parieurs essaient de trouver les 3 chevaux gagnants (dans l'ordre ou le désordre).

1. La position au départ est très importante. Combien de positions différentes de chevaux peut-on avoir au départ de la course ?

2. Quel nombre total de possibilités de tiercés dans l'ordre peut-on réaliser ?

3. Quel nombre total de possibilités de tiercés dans le désordre peut-on réaliser ?

LA BONNE MÉTHODE

1. Nous avons un ensemble fini dont il faut chercher toutes les permutations possibles.

2. Il y a la notion d'ordre dans l'arrivée des chevaux, il faut donc chercher les arrangements.

3. Il n'y a pas la notion d'ordre dans l'arrivée des chevaux, il faut donc chercher les combinaisons.

Sujet 2

Lors d'une partie de poker, on distribue 5 cartes à chaque joueur (on appelle cela une main).

Les cartes sont constituées de 8 hauteurs : As, Roi, Dame, Valet, 10, 9, 8 et 7.

Chaque hauteur est constituée de 4 couleurs : Cœur, Carreau, Pique et Trèfle.

1. De combien de cartes est constitué le jeu de poker ?

2. Un carré est constitué de 4 cartes de même hauteur. Combien de mains de 5 cartes comprennent un carré ?

3. Un full est constitué d'un brelan (3 cartes de même hauteur) et d'une paire (2 cartes de même hauteur). Combien de mains de 5 cartes comprennent un full ?

4. Combien de mains de 5 cartes sont constituées d'une seule couleur ?

LA BONNE MÉTHODE

1. Nous avons le produit cartésien de deux ensembles finis.

2. Compter le nombre de carrés possibles, accompagnés d'une cinquième carte quelconque.

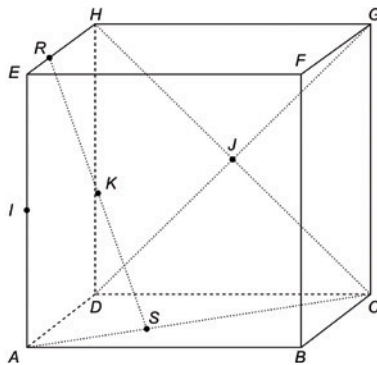
3. Commencer par compter combien il y a de full avec, par exemple, un brelan d'as et une paire de rois. Ensuite, compter combien de hauteurs possibles on peut choisir pour le brelan ou la paire.

4. Compter combien il y a de mains avec une couleur choisie.

Manipulation des vecteurs, des droites et des plans de l'espace

Sujet 1

ABCDEFGH est un cube.



On a placé les points I, J, K, R et S tels que :

- I milieu de [AE];
- J centre de la face CDHG;
- R vérifie $ER = \frac{1}{3}EH$;

– S vérifie $AS = \frac{1}{3}AC$;

– K milieu de [RS].

- 1.a. Justifier que (ABD) est un plan.
- b. Exprimer le vecteur IJ en fonction des vecteurs AB et AD .
- c. En déduire la position relative de la droite (IJ) et du plan (ABD).
- 2.a. Exprimer le vecteur AI en fonction du vecteur AE .
- b. Exprimer le vecteur AK en fonction des vecteurs AB , AD et AE .
- c. En déduire l'expression du vecteur IK en fonction des vecteurs AB , AD et AE .
- 3.a. En utilisant les vecteurs IJ et IK , démontrer que les points I, J et K sont alignés.
- b. En déduire que les points I, J, K, R et S sont coplanaires.

LA BONNE MÉTHODE

- 1.a. Utiliser la définition du cours.
- b. Utiliser la relation de Chasles en introduisant les points A et D.
- c. Utiliser la combinaison linéaire des vecteurs.
- 2.a. Utiliser que le point I est le milieu du segment [AE].
- b. Cette question est plus complexe. Il faut utiliser la relation de Chasles en introduisant les points S, A et E.
- c. Regrouper les deux réponses précédentes.
- 3.a. Utiliser les réponses du 1.b. et du 2.c., et la colinéarité des vecteurs.
- b. Il faut commencer par justifier que les droites (IJ) et (RS) sont sécantes en K.

Sujet 2

On considère un tétraèdre ABCD.

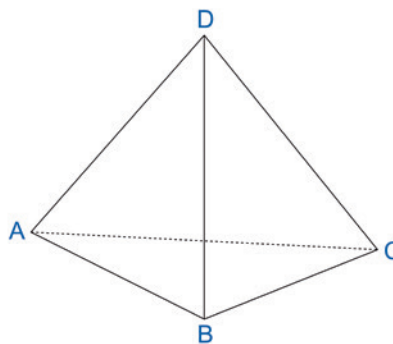
Soit M le point tel que $AM = AB + \frac{1}{2}AC$.

Soit N le point tel que $AN =$

Soit P le point tel que $AP = \frac{4}{9}AD$.

1. Placer les points M, N et P sur la figure en annexe.
2. Justifier que le point M se trouve dans le plan (ABC).
3. Exprimer les vecteurs MN et MP en fonction des vecteurs AB , AC et AD . En déduire que les points M, N et P ne sont pas alignés.
4. Justifier que les droites (NC) et (AD) sont coplanaires.
5. Exprimer les vecteurs CP et CN en fonction des vecteurs AC et AD . En déduire que le point P est le point d'intersection des droites (AD) et (NC).

ANNEXE



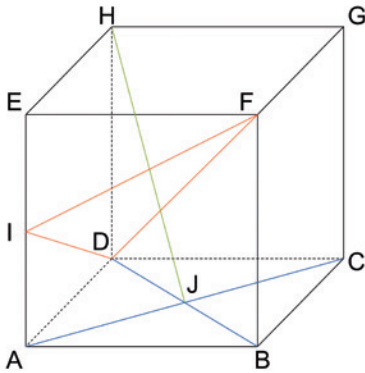
LA BONNE MÉTHODE

1. Partir du point A et utiliser les égalités vectorielles.
2. Utiliser l'égalité vectorielle avec $\overrightarrow{AM}$.
3. Utiliser la relation de Chasles en introduisant le point A.
4. Prouver que les points appartiennent au plan (ACD).
5. Utiliser la relation de Chasles en introduisant le point A.

✍ Orthogonalité et distances dans l'espace

Sujet 1

ABCDEFGH est un cube d'arête 1.



On a placé les points I, J tels que :

- I milieu de [AE] ;
- J centre de la face ABCD.

PARTIE A

Le but de cette partie est d'étudier la position relative de la droite (BH) et du plan (IDF) en utilisant le produit scalaire, sans et avec un repère.

1. On rappelle que la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 est égale à $\sqrt{2}$.

- a. En remarquant que $HJ = HD + DJ$ et que $FD = FB + BD$, calculer $HJ \cdot FD$.
 - b. En utilisant la même méthode, calculer $HJ \cdot DI$.
 - c. En déduire les positions relatives de la droite (HJ) et du plan (IDF).
2. On se place dans le repère orthonormé $(A; AB, AD, AE)$.
 - a. Donner les coordonnées de tous les points de la figure.
 - b. Donner les coordonnées des vecteurs HJ et FD. En déduire
 - c. En utilisant la même méthode, calculer $HJ \cdot DI$.
 - d. En déduire les positions relatives de la droite (HJ) et du plan (IDF).

PARTIE B

Le but de cette partie est de donner une mesure de l'angle DIF.

On se place de nouveau dans le repère orthonormé

1. Calculer les longueurs ID, IF et DF.
2. Calculer le produit scalaire $ID \cdot IF$ de deux manières différentes pour en déduire l'angle DIF arrondi au degré près.

LA BONNE MÉTHODE

PARTIE A

1. a. Utiliser deux propriétés du produit scalaire, la distributivité et l'orthogonalité de deux vecteurs.
 - b. Utiliser la relation de Chasles en introduisant les points D et A.
 - c. Déduire des questions précédentes l'orthogonalité de vecteurs.
2. a. Lire les coordonnées sur la figure.
 - b. Utiliser la définition des coordonnées d'un vecteur dans un repère orthonormé et la définition du produit scalaire dans un repère : soient $\vec{u}(a, b, c)$ et $\vec{v}(d, e, f)$ deux vecteurs de l'espace, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = ad + be + cf$.
 - c. Même méthode qu'au b.
 - d. Même conclusion qu'au 1.c.

PARTIE B

1. Utiliser la formule de calcul de distance dans un repère orthonormé de l'espace.
2. Utiliser la définition générale du produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ et la définition dans un repère.

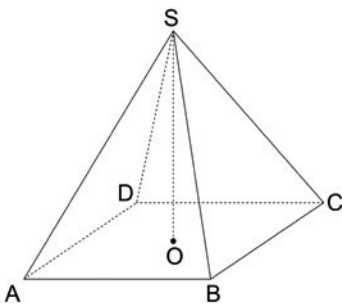
Sujet 2

Énoncé

On munit l'espace du repère orthonormé $(O; i, j, k)$.

Soit la pyramide régulière ABCDS à base carrée telle que :

- O centre de la base ABCD ;
- $A(-1; -1; 0), B(1; -1; 0), C(1; 1; 0), D(-1; 1; 0)$;
- $AS = BS = CS = DS = 3\sqrt{2}$.



1. a. Calculer AC.
 - b. Calculer le produit scalaire $AC \cdot AS$ de deux manières différentes pour en déduire l'angle CAS arrondi au degré près.
2. On admet que $S(0; 0; 4)$. Soient M, N, P et Q tels que :
 - M milieu de l'arête [SC] ;
 - N milieu de l'arête [SA] ;
 - P vérifiant $AP = \frac{11}{6} AB$;
 - Q vérifiant $AQ = \frac{11}{6} AD$.
 - a. Calculer les coordonnées des points M, N, P et Q.
 - b. Calculer $AM \cdot NP$ et $AM \cdot NQ$.
 - c. En déduire les positions relatives de la droite (AM) et du plan (NPQ).

LA BONNE MÉTHODE

1. a. Utiliser la formule de la distance entre deux points dans un repère orthonormé de l'espace.
 - b. Calculer le produit scalaire en utilisant la formule de polarisation $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$ et la définition du produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.
2. a. Utiliser la formule des coordonnées d'un milieu pour les points M et N. Utiliser l'égalité vectorielle pour les points P et Q.
 - b. Calculer le produit scalaire en utilisant les coordonnées.
 - c. Déduire des questions précédentes l'orthogonalité de vecteurs.

Représentations paramétriques et équations cartésiennes

Sujet 1. D'après sujet Bac S, Pondichéry, mai 2018

Dans l'espace muni du repère orthonormé $(O; i, j, k)$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives $(2; 1; 4)$, $(4; -1; 0)$, $(0; 3; 2)$ et $(4; 3; -2)$.

1. Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).
3. Soit M un point de la droite (CD).
 - a. Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.
 - b. On note H le point de la droite (CD) ayant pour coordonnées $(3; 3; -1)$. Vérifier que les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires.

- c. Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à 12 cm^2 .

4. a. Démontrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

- b. Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

- c. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A et orthogonale au plan (BCD).

- d. Démontrer que le point I, intersection de la droite (Δ) et du plan (BCD) a pour coordonnées $\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{8}{3}$.

5. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

LA BONNE MÉTHODE

1. Autrement dit les vecteurs $\vec{BA}$, $\vec{BC}$ et $\vec{BD}$ sont-ils coplanaires ?
2. (CD) est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ alignés avec C et D.
3. a. La question précédente permet de caractériser les points de (CD) en fonction d'un paramètre t , on calcule BM^2 en fonction de t , et on détermine la valeur de t qui minimise la fonction.
- b. Le produit scalaire est le bon outil.
- c. Ce qui précède permet d'affirmer que [BH] est la hauteur du triangle BCD issue de B.
4. a. Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

4. b. Si une droite est orthogonale à un plan alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.
- c. On connaît un point de la droite et un vecteur directeur.
- d. Le point d'intersection est élément de (Δ), ce qui contraint ses coordonnées. Et celles-ci vérifient aussi une équation cartésienne de (BCD).
5. Le volume d'un tétraèdre est $V = \frac{V \times h}{3}$ où B désigne la surface de la base et h la hauteur du solide.

Sujet 2. D'après sujet Bac S, Asie, juin 2004

L'espace est muni du repère orthonormé $(O; i, j, k)$. Les trois questions sont indépendantes.

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble des points $M(x; y; z)$ vérifiant $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$.

2. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

- a. La droite $\mathcal{D}$ dont un système d'équations paramétriques est $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t + 5 \\ z = 5t - 1 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ est parallèle strictement au plan d'équation $5x - 5y + z = 0$.

- b. La droite $\mathcal{D}$ définie par $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t + 5 \\ z = 5t - 1 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ et la droite $\mathcal{D}'$ définie par $\begin{cases} x = -3s \\ y = 1 + s \\ z = 2 + 2s \end{cases} (s \in \mathbb{R})$ sont coplanaires.

LA BONNE MÉTHODE

1. Il s'agit de l'intersection de deux plans manifestement non parallèles...
2. a. Considérer un vecteur directeur de l'une et un vecteur normal de l'autre, et les étudier du point de vue de l'orthogonalité.
2. b. Deux droites de l'espace qui ne sont ni parallèles ni sécantes sont non coplanaires.

Un éléphant, ça compte énormément

L'éléphant a un gros cerveau, c'est entendu ; une mémoire légendaire, parfait. Mais, jusqu'ici, personne n'avait repéré chez le pachyderme la bosse des maths. Une équipe japonaise vient pourtant de mettre en évidence, chez un éléphant d'Asie du zoo d'Uneo, une capacité rare à manier les quantités numériques. Les exploits d'Authai – 14 ans mais pas toutes ses défenses – viennent d'être décrits dans le *Journal of Ethology*.

Pour étudier la jeune femelle, la spécialiste des éléphants Naoko Irie a conçu un dispositif novateur : un écran tactile géant à la mesure du pachyderme. Confrontée à deux images, Authai a d'abord appris à utiliser le dispositif afin d'indiquer laquelle contenait davantage d'éléments : une bonne réponse valait récompense de fruits. Double dose si la réponse intervenait en moins de trente secondes. Puis l'animal a commencé les tests. Des couples d'images contenant chacune 1 à 10 éléments – bananes, pommes, pastèques... – lui ont été présentées. Les fruits étaient de tailles variables, afin que la rusée ne se contente pas de regarder quel écran était le plus rempli. Authai devait choisir avec sa trompe.

Les résultats se sont avérés « très convaincant », estime l'éthologue japonaise, puisque le taux de bonnes réponses atteint 66,8 %. « Surtout, ce taux n'est pas affecté par la distance entre les deux quantités, leur ratio ou encore leur taille, souligne-t-elle. C'est unique chez les animaux. Authai prend simplement davantage de temps pour répondre quand l'écart est plus faible et le ratio plus grand. »

Pour bien mesurer l'enjeu, il convient d'abord de savoir que de nombreux animaux peuvent dénombrer des objets, mais

seulement jusqu'à 4 ou 5. Grands singes, oiseaux, parfois même insectes. Étonnamment, cette limite correspond plus ou moins à notre propre capacité à identifier une quantité de façon instantanée. Passée cette frontière, nous comptons de façon séquentielle : 5, 6, 7... Chez les animaux, ce seuil introduit de l'approximation. Certains peuvent encore reconnaître entre deux quantités laquelle est la plus grande, mais à condition que celles-ci soient suffisamment distinctes. Ils feront ainsi d'autant plus d'erreurs que le ratio entre deux quantités sera grand : distinguer 2 et 12 (ratio 1/6) est plus facile que 10 et 12 (ratio 5/6). De même, la distance facilite la reconnaissance : 2 et 12 plus distincts que 1 et 6, même avec un ratio identique. Enfin, la difficulté croît avec la magnitude, autrement dit la taille des quantités numériques présentées.

Rien de tout cela pour l'éléphant, qui semble aussi à l'aise avec 7 et 8 qu'avec 2 et 3. « Cela va à l'encontre de la théorie actuelle, et, si ce résultat est confirmé, cela suggère que l'éléphant pourrait avoir un mode de calcul différent des animaux déjà étudiés, souligne Aurore Avarguès-Weber, éthologue à l'université de Toulouse, qui a récemment étudié les capacités de dénombrement des abeilles. Je serais néanmoins prudente, car un seul animal a été testé. »

Authai, l'Einstein des éléphants ? « Dans une précédente étude, nous l'avions testé avec quatre autres et les résultats allaient déjà en ce sens, répond Naoko Irie. Alors cinq Einstein, je ne pense pas. » Psychologue spécialiste du dénombrement chez les bébés, Véronique Izard s'inquiète de son côté

de la fiabilité statistique de l'étude. « Nous allons poursuivre avec davantage d'animaux et en dépassant le nombre 10 », annonce la chercheuse japonaise.

Autant de précautions nécessaires avant de pouvoir confirmer l'intuition de l'éthologue : « L'éléphant pourrait avoir une sorte de représentation symbolique de l'information numérique. » « L'éléphant d'Asie, corrige la Japonaise. Rien de tel n'a été montré chez son cousin d'Afrique, et les deux espèces ont divergé il y a aussi longtemps que nous et les singes. » ●

Nathaniel Herzberg, *Le Monde*
daté du 31.10.2018

POURQUOI CET ARTICLE ?

Le principe du dénombrement est l'un des piliers des mathématiques d'un point de vue calculatoire. Le dénombrement est donc l'une des premières notions travaillées à l'école avec les enfants, qui progressivement apprennent à compter de 1 à 3, puis de 1 à 10, et de plus en plus au fil des années. La construction de la notion de nombre dans l'esprit de chacun nécessite en effet obligatoirement la compréhension de la notion de dénombrement. Ensuite seulement, on peut apprendre à travailler les différentes notions mathématiques dans des ensembles finis et infinis. Les animaux sachant dénombrer les premiers chiffres comprennent la notion de quantité comme un jeune enfant, c'est-à-dire à partir de représentations concrètes, première étape dans la construction des nombres et de tout ce qui suit dans l'univers des mathématiques.

Bataille d'astronomes autour d'une hypothétique planète

C'est une planète extra-solaire qui joue à cache-cache avec les astronomes. Ou plutôt, qui se fait détecter par certains... et pas par d'autres. Tout cela se passe autour de l'étoile Gliese-581 qui appartient à cette catégorie stellaire d'astres moins massifs et moins chauds que notre Soleil, appelés naines rouges. Gliese-581 est devenue en quelques années une des « chouchoutes » des chasseurs d'exoplanètes. Non seulement cette étoile est proche de nous puisqu'elle navigue à seulement 20 années-lumière, dans la constellation de la Balance, mais on sait aussi aujourd'hui qu'une farandole de planètes l'entoure. Tout le problème de l'histoire, c'est que deux des plus performantes équipes d'exoplanétologues du monde se disputent depuis deux ans sur le nombre de ses compagnons et notamment sur la présence d'une planète rocheuse dont la particularité serait de se trouver dans la zone d'habitabilité de son étoile, c'est-à-dire sur une orbite qui lui assurerait une température de surface clémente. Et par conséquent, la possibilité d'y trouver de l'eau sous forme liquide, le Graal des exobiologistes car, selon eux, la présence de cette eau liquide est propice à l'apparition de la vie.

Ré faisons brièvement l'historique de cette bataille d'astronomes, qui est au fond une bonne illustration de la manière dont la science fonctionne et avance. C'est l'équipe genevoise de Michel Mayor (co-découvreur de la première planète extra-solaire en 1995) qui, grâce à son excellent instrument Harps, a détecté les quatre premiers compagnons de l'étoile, baptisés, selon la convention en vigueur, Gliese-581b, c, d et e. Puis, en 2010, ses concurrents américains, qui travaillent avec le spectrographe Hires, annoncent dans un branle-bas de combat médiatique la découverte de deux planètes supplémentaires, Gliese-581f

et g, cette dernière étant, d'après leurs résultats, une planète rocheuse située dans la magique zone d'habitabilité, une première à l'époque. Médias et chercheurs en sont tout émoustillés. C'est la planète « Boucle d'or » : elle n'est ni trop petite, ni trop grosse, ni trop proche de son étoile, ni trop lointaine, elle est juste comme il faut, comme dans le conte des Trois Ours. Mais, deux semaines seulement après cette annonce fracassante, douche froide : les Suisses disent n'avoir trouvé aucune trace de ces deux planètes dans toutes les données « de meilleure qualité » dont ils disposent avec Harps. Patatras, le beau conte de la planète habitable s'écroule car un astre non-confirmé par la meilleure équipe du monde est un astre qui n'existe pas !

Mais les Américains, un tantinet ridiculisés dans l'affaire, n'ont pas baissé les bras et viennent de proposer une nouvelle analyse des données confirmant que, au moins pour le cas de l'emblématique Gliese-581g, ils n'ont pas eu la berlue. Pour comprendre ce qui s'est passé, il faut savoir qu'aucune des deux équipes ne voit directement les planètes extrasolaires. Toutes deux utilisent la méthode indirecte dite des vitesses radiales. Quand une étoile est accompagnée, elle tourne autour du barycentre du système et l'on peut détecter ce mouvement que les planètes impriment à leur soleil. Plus la planète est massive et proche de son hôte, plus son influence est détectable, même si cela reste minime. L'affaire se complique lorsque l'étoile, à l'instar de Gliese-581, dispose de plusieurs compagnons et que, dans la liste, se trouvent des poids lourds et des poids plume... On doit alors démêler l'influence des uns et des autres. Pour détecter une exoplanète, il faut donc avoir non seulement un excellent instrument mais aussi les bonnes méthodes d'analyse des données.

Et c'est là que, selon les Américains, les Suisses se seraient trompés. Dans une étude à paraître dans la revue *Astronomische Nachrichten*, les premiers décortiquent et critiquent le modèle de système planétaire retenu par les seconds. Ce modèle, disent Steven Vogt, Paul Butler et Nader Haghighipour, n'est pas stable sur le long terme. Plusieurs essais de simulation numérique montrent que, dans le meilleur des cas, le système planétaire de Gliese-581 (à 4 planètes) ne tient pas en place plus de 200 000 ans, les deux planètes les plus proches de l'étoile finissant par se télescoper. Ils en proposent donc un autre, selon eux plus simple et surtout plus stable sur le long terme puisqu'ils ont mené sans encombre une simulation sur 20 millions d'années. Dotés de ce modèle, les Américains ont réanalysé... les données des Suisses. Et comme par magie, avec cette nouvelle vision des choses, une fois que l'on retire les signaux des quatre planètes connues et confirmées, un signal résiduel apparaît, un pic correspondant à l'orbite de Gliese-581g (Gliese-581f, en revanche, n'a pas réémergé). La probabilité pour que ce pic soit une fausse alarme n'est cependant pas nulle, mais sa valeur (3,7 %) est jugée suffisamment basse par les auteurs de l'étude.

En attendant une réponse des Suisses, on peut s'interroger sur le pourquoi d'une telle bagarre scientifique. L'enjeu va en réalité bien plus loin que la simple découverte d'une exoplanète de plus (nous en sommes à près de 800 à l'heure actuelle). Si Gliese-581g existe bel et bien et se trouve vraiment sur l'orbite décrite par Vogt, Butler et Haghighipour, elle monte directement sur la première marche du podium des planètes habitables, un peu comme un tube entre, dès sa première semaine de diffusion, en première place des hit-parades. Le Planetary Habitability Laboratory (PHL), qui dresse le catalogue des exoplanètes potentiellement habitables, s'est d'ailleurs empressé de remettre son palmarès à jour, ce alors même que Gliese-581g n'est, à l'heure

où j'écris ces lignes, toujours pas officiellement intégrée à la liste des exoplanètes reconnues.

Sur cette infographie figure, sous le nom de chaque planète, un nombre un peu mystérieux. Il s'agit de l'indice (très géocentrique...) de similarité avec la Terre. Notre planète est à 1 (forcément, rien ne lui ressemble plus qu'elle-même) tandis que Mars est à 0,66. Cet indice intègre le rayon de la planète, sa densité (et par conséquent, sa composition), sa température de surface et sa capacité à conserver une potentielle atmosphère. Les chercheurs du PHL estiment que quand l'indice est supérieur à 0,8, la planète peut être considérée comme analogue à la Terre. Avec son 0,92, Gliese-581g, qui est aussi la plus petite de la liste ci-dessus (avec une masse estimée à au moins 2,2 masses terrestres), arrive largement

en tête. En 1995, les Américains Geoffrey Marcy et Paul Butler (le même qui signe cette étude) avaient été coiffés au poteau par Michel Mayor et Didier Queloz pour l'annonce de la première planète extra-solaire. Cette bataille autour de Gliese-581g, outre qu'elle traduit une

intense compétition scientifique qui n'a jamais faibli depuis cette date, est peut-être pour les Américains une sorte de petite revanche... ●

Pierre Barthélémy, *Le Monde*
daté du 25.07.2012

POURQUOI CET ARTICLE ?

Les repères de l'espace, les vecteurs et leurs représentations sont les fondements de l'étude spatiale réalisée par les scientifiques depuis plusieurs décennies. Cet article montre que grâce aux repères, les scientifiques réussissent à placer de nouvelles planètes régulièrement dans notre univers. Ensuite, ils étudient leur trajectoire grâce à ces repères. Ces trajectoires sont souvent des ellipses, influencées par divers facteurs extérieurs, tels que l'attraction entre elles, les frottements, les phénomènes de rotation et bien d'autres encore. Tous ces facteurs sont représentés par les physiciens sous forme de vecteurs, afin de comprendre l'impact de chacun sur la trajectoire des planètes. Or, les scientifiques américains et suisses sont en désaccord concernant l'existence possible ou non de la planète évoquée dans l'article. L'utilisation des vecteurs et des différentes représentations graphiques de l'espace est ici indispensable pour résoudre ce dilemme.

Mécaniques du flux et du reflux

Le phénomène quotidien des marées, apparemment simple, est en fait la conséquence de facteurs nombreux et complexes.

Le porte-conteneurs allemand *Kini-Kersten*, échoué depuis la nuit du 31 décembre au 1^{er} janvier sur la plage du Rozel (Manche), a pu être remis à flot le 18 janvier. Il n'a donc pas eu à attendre les très fortes marées de vive eau des 31 janvier et 1^{er} février, ni les marées de vive eau encore plus fortes des 28 février et 1^{er} mars.

Sur les côtes françaises de l'Atlantique et de la Manche, la mer monte et descend deux fois en 24 heures et 50 minutes. Mais tout le monde a constaté que la hauteur des hautes mers et celle des basses mers varient beaucoup.

Les marées océaniques sont une des conséquences de la gravitation universelle : deux corps s'attirent en fonction du produit de leur masse respective et en raison inverse du carré de leur distance. Dans le cas des marées, il s'agit de la différence des attractions subies au centre

et à la surface de la Terre. Cette différence varie en raison inverse du cube de la distance Terre-Lune ou Terre-Soleil. Ce qui explique que, en dépit de sa très grande masse, le Soleil engendre des marées moitié moindres que celles dues à la Lune.

Chacun de ces deux astres tourne, par rapport à la Terre, à des rythmes différents, mais tous les 14,75 jours la Terre, la Lune et le Soleil sont alignés sur une même droite, que la Lune soit entre le Soleil et la Terre (c'est la nouvelle Lune), ou qu'elle soit de l'autre côté de la Terre (c'est la pleine Lune). De toute façon, il y a alignement, ou « syzygie » (comme disent les astronomes) ; l'attraction exercée alors par chacun des deux astres s'additionne, provoquant des marées importantes ou marées de vive eau.

À mi-chemin entre deux syzygies, le Soleil, la Terre et la Lune forment un

angle de 90° (c'est la « quadrature », qui correspond au premier quartier et au dernier quartier de la Lune). L'attraction du Soleil et celle de la Lune se contrarient. Les marées, alors peu importantes, sont dites de morte eau.

Mais, avons-nous dit, toutes les marées, qu'elles soient de vive ou de morte eau, n'ont pas la même amplitude. D'autres facteurs astronomiques jouent en effet.

Le Soleil est plus ou moins éloigné de nous puisque l'orbite de la Terre est elliptique. Il est le plus près le 2 janvier (périhélie, 147 millions de kilomètres) et le plus loin le 2 juillet (aphélie, 152 millions de kilomètres). En outre, l'attraction solaire est plus forte lorsque le Soleil passe dans le plan de l'équateur terrestre, c'est-à-dire aux équinoxes (en général les 21 mars et 21 septembre). Mais les équinoxes ne coïncident que tous les

18 ans et 11 jours avec une syzygie. A ce moment rare, les marées d'équinoxe seront très fortes. En revanche, une marée d'équinoxe coïncidant avec une quadrature sera médiocre.

La Lune parcourt, elle aussi, une ellipse dont le plan fait un angle qui varie de 18° à 28° en 18,6 ans avec le plan de l'équateur terrestre. Son attraction est aussi à son maximum lorsqu'elle coupe ce plan équatorial (ce qui lui arrive tous les 13,5 jours). En outre, l'attraction lunaire est un peu plus forte quand notre satellite est le plus proche de la Terre (périgée, soit 360 000 kilomètres), et un peu plus faible quand la Lune est le plus éloignée de nous (apogée, soit 400 000 kilomètres). La Lune passe par son périgée tous les 27,6 jours. Mais ce rapprochement ne coïncide que tous les huit ans et 310 jours avec le passage de la Lune dans le plan de l'équateur terrestre.

Coefficient

On voit ainsi que les facteurs astronomiques régissant les marées sont fort nombreux, qu'ils cumulent ou diminuent leurs effets, et que les périodes particulières à chacun de ces facteurs sont très diverses. Mais les astronomes peuvent calculer à l'avance les combinaisons variées des facteurs astronomiques. Ainsi détermine-t-on les coefficients de toutes les marées, passées et futures.

Selon l'échelle propre à la France, le coefficient 100 a été attribué aux marées moyennes de vive eau d'équinoxe. Le minimum théorique est de 20 pour la marée de morte eau la plus faible. Le maximum possible est de 120, mais ce dernier n'a jamais été atteint depuis 1800. En 1900 et 1918, on est arrivé à 119. Plus près de nous, le coefficient a été de 118 le 27 mars 1967, mais ce chiffre avait été atteint déjà quatorze fois depuis 1800. Le 31 janvier prochain, le coefficient sera de 102 (101 le lendemain). Le 1^{er} mars, il montera à 107 (à 101 et 104 le 28 février).

Tout est encore rendu compliqué car d'autres facteurs, étrangers à l'astronomie, entrent aussi en jeu dans le balancement des marées.

La forme des bassins océaniques (et aussi des golfes ou estuaires) intervient.

Chaque bassin a sa période propre. Pour comprendre ce qu'est une période propre, reprenons la comparaison utilisée par M. Bruno Morando, astronome au Bureau des longitudes, dans un article paru en 1984 dans le volume l'Astronomie (*Encyclopédie Atlas du ciel*).

« Quand on sort brusquement de sa baignoire, la masse d'eau qu'elle contient se met à osciller en bloc d'un bord à l'autre. L'amplitude de ces oscillations dépend de l'impulsion donnée, mais, en revanche, la période des oscillations [...] ne dépend que de la taille et de la forme de la baignoire, et on l'appelle la période propre de la baignoire. »

Si la période propre du bassin, des golfes ou des estuaires est la même que celle des ondes principales de marée, il y a un phénomène de résonance, c'est-à-dire d'amplification des marées. Si toutes ces périodes sont différentes les unes des autres, les résultats surprennent souvent le profane. Ainsi a-t-on, par jour, entre autres, une seule marée dans le golfe du Tonkin ; deux pleines mers se succédant à une heure et demie d'intervalle suivie d'une seule basse mer à Southampton (Grande-Bretagne) ; deux marées hautes et deux marées basses en Bretagne ; en plein océan, des marées très peu importantes, etc.

Les formes locales interviennent, bien évidemment, dans le marnage, c'est-à-dire dans la différence de hauteur, en un lieu donné, entre la basse mer et la haute mer. Le plus grand marnage est situé dans la baie de Fundy (Canada et États-Unis) : 13,6 mètres en vive eau moyenne et 18,50 mètres en vive eau exceptionnelle d'équinoxe. La baie du Mont Saint-Michel n'est pas mal lotie : 12,6 mètres en vive eau moyenne, 15 mètres si le coefficient 120 était atteint.

Enfin, d'autres éléments, indépendants de la Terre, de la Lune et du Soleil interviennent... en compléments. Si le passage d'une forte dépression atmosphérique coïncide avec une grande marée, la mer montera plus et descendra moins que le coefficient permettrait de l'espérer : le niveau de la mer en effet monte d'un centimètre chaque fois que la pression baisse d'un millibar (la pression atmosphérique moyenne est de 1 013 millibars).

Autre facteur influant sur le niveau de la mer : le vent. Rappelons simplement que la soupe trop chaude monte sur le côté de l'assiette vers lequel on souffle. Un seul exemple : si le vent souffle au moins pendant douze heures à 80 kilomètres à l'heure, vers l'est par exemple, la mer montera parfois d'un mètre excédentaire sur la côte exposée aux vents d'ouest, en particulier sur les rivages faits de longues plages plates. Un fort vent d'ouest a ainsi empêché la mer de descendre le 27 mars 1967 aussi bas que les curieux accourus sur les plages françaises l'avaient espéré.

Dépression atmosphérique et vents « mal » orientés peuvent engendrer ce qu'on appelle les « ondes de tempêtes ». Si celles-ci coïncident avec des hautes mers de vive eau, elles peuvent déclencher alors des catastrophes : en février 1953, l'inondation des basses terres hollandaises (1 800 morts) ; en novembre 1970, l'invasion par la mer des plaines basses du Pakistan oriental, devenu en 1971 le Bangladesh (200 000 à 600 000 ou 800 000 morts, personne ne le sait). ●

Yvonne Rebeyrol, *Le Monde*
daté du 28.01.1987

POURQUOI CET ARTICLE ?

La force de gravitation est une force qui se représente par un vecteur orthogonal à l'objet qui l'exerce. Dans le cas du Soleil, de la Terre et de la Lune, chacun exerce une gravitation sur les deux autres. C'est pourquoi, quand ils sont alignés, les vecteurs représentant les forces de gravitation se trouvent avoir la même direction (même s'ils gardent des sens opposés). À cause de ce phénomène, et en fonction de la proximité de chaque élément par rapport aux autres, ces forces provoquent notamment les fortes marées observées sur Terre. À l'inverse, lorsque les astres forment un angle de 90° les uns par rapport aux autres, les vecteurs forces ne sont pas dans la même direction, mais sont orthogonaux les uns aux autres et ont donc moins d'influence sur les éléments, notamment sur les marées.

Le big data, entre nombres et lumières

Ultraconnectée, l'humanité produit toujours plus de données numériques. Les enseignements qu'on peut tirer de ces volumes vertigineux d'informations brutes restent incertains : les mathématiques peinent encore à les interpréter.

Les chiffres sont impressionnants. Pendant la seule année 2011, le volume de l'information qui a été numérisée dans le monde a atteint 10 puissance 21 octets. Pour les plus fâchés avec les maths, cela signifie un 1 avec 21 zéros derrière : ça s'appelle des « zettaoctets », et cela représente... autant que toute l'information numérisée jusque-là. En 2013, ce volume a été 4,4 fois supérieur ! A ce rythme, en 2020, l'humanité stockerait 44 zettaoctets de données dans ses ordinateurs, téléphones, tablettes – mais aussi dans ses montres, lunettes, réfrigérateurs, automobiles, puces sous-cutanées, objets de plus en plus bardés de capteurs connectés à Internet. Soit 44 000 milliards de gigaoctets...

Cet univers du big data, ou « données massives » en français, ne servirait pas à grand-chose si celles-ci ne pouvaient être stockées (dans des serveurs de plus en plus grands), transmises (par un débit Internet de plus en plus élevé) et surtout traitées (par des ordinateurs de plus en plus puissants) – bref : si l'on ne pouvait pas en « extraire de la valeur ». Là encore, les chiffres sont énormes : selon l'institut américain Data Driven Marketing, 156 milliards de dollars ont été tirés de l'exploitation des données personnelles dans le monde en 2012. Un chiffre qui, d'après le cabinet de conseil McKinsey, serait porté à 600 milliards de dollars par an si les entreprises exploitaient toutes les données dont elles disposent.

Garder la tête froide devant une telle manne ? Impossible. Des dizaines de rapports, études et séminaires se sont penchés avec gourmandise sur cette « Nouvelle frontière pour l'innovation, la concurrence et la productivité » (titre du rapport McKinsey de juin 2011, devenu le livre de chevet des thuriféraires du big data). Les médias publient des « suppléments

big data » payés par la publicité des éditeurs de « solutions logicielles ». Les pouvoirs publics sont sommés de « Faire de la France un champion de la révolution numérique » (titre d'un rapport de l'Institut de l'entreprise, d'avril 2015)...

Face à cette vague, la critique s'organise, qui dénonce les intrusions des entreprises (par la publicité) et des Etats (par la surveillance) dans la vie privée. Mais quelques mathématiciens et informaticiens experts du sujet, pour certains travaillant eux-mêmes avec les entreprises, soulignent d'autres limites, inhérentes à la nature même du big data.

Ces limites sont apparues clairement en 2013, lorsque le programme Google Flu Trends (GFT) s'est avéré incapable de prédire le pic d'une épidémie de grippe aux Etats-Unis. Avec force publicités, Google avait créé, en 2008, un moteur de recherche capable de capter les données personnelles fournies par les internautes sur leur état de santé, assorti d'algorithmes pouvant prédire l'arrivée d'une épidémie plusieurs semaines à l'avance. Après cet échec, Google a abandonné le programme.

Mais ses causes – médiocre qualité et mauvaise interprétation des données

collectées – ont passionné les chercheurs. Les enseignements qu'on en a tirés confirment que l'utilisation optimale du big data n'est pas encore pour demain.

Exploiter les données disponibles sur les clients, usagers, citoyens ou électeurs est aussi vieux que le commerce et la politique. Toute la science du marketing et de la gestion publique consiste à les collecter et à les chiffrer, pour pouvoir en faire des statistiques que des algorithmes organiseront de façon logique et que des modèles mathématiques cartographieront afin d'en faire des outils d'aide à la décision. Quelle couleur de « packaging » va plaire à la ménagère de moins de 50 ans ? A qui envoyer des messages pour lancer le buzz sur le prochain épisode de *Star Wars*... ou sur un candidat à l'élection présidentielle ? À quelles conditions météorologiques devra résister cette aile d'avion ? Au près de quel type de malades ce nouveau médicament sera-t-il le plus efficace ? A quel quartier d'une ville consacrer le plus de moyens pour ramasser les ordures ? Les objectifs sont toujours les mêmes, mais la possibilité d'exploiter les données massives a renouvelé la façon de faire.

POURQUOI CET ARTICLE ?

Afin de représenter graphiquement les données massives, il faudrait imaginer un nuage de points possédant pour coordonnées cent nombres réels. Un cas simple serait que ces points M appartiennent à une même droite passant par $A(a_1, \dots, a_{100})$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (u_1, \dots, u_{100})$ d'équation paramétrique :

$$\begin{cases} m_1 = a_1 + k \times u_1 \\ \dots \\ m_{100} = a_{100} + k \times u_{100} \end{cases} \quad \text{avec } k \text{ un réel.}$$

Cela est rarement le cas. On pourrait essayer de trouver l'expression d'une fonction à plusieurs variables dont la représentation graphique passerait par le plus de points possibles, mais il y aurait de très nombreuses possibilités. Il serait par exemple possible de considérer une fonction définie de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^{98}$ qui à un couple de réels (a, b) associe un 98-uplet de réels $(x_1, \dots, x_{98})$. Afin d'étudier les variations d'une telle fonction, il faudrait avoir recours à la dérivation partielle et calculer des gradients. Malheureusement, **aucun moyen visuel simple de représentation graphique pour ce type de fonction n'a encore été découvert.**

Dans la gestion traditionnelle des données, on isole et on agrège les données « pertinentes » : celles que l'on estime, intuitivement ou empiriquement, liées à l'hypothèse à vérifier, à la question posée. Il s'agit ensuite de comprendre la nature des rapports liant ces données entre elles, puis de modéliser la structure de ces rapports. Le big data, lui, implique « de traiter d'immenses quantités de données hétérogènes, faisant apparaître des liens inattendus, des structures cachées, explique Frank Pacard, mathématicien et directeur des études et de la recherche à l'Ecole polytechnique. Au lieu d'utiliser des données pour interroger une hypothèse préalable, la découverte de structures nouvelles permet de formuler de nouvelles hypothèses, qui peuvent et doivent ensuite être testées ». Une promesse de nouveaux continents qui intéresse au plus haut point les entreprises et les investisseurs – les premières rêvant du logiciel qui ciblera leurs campagnes de pub sur leurs seuls futurs acheteurs, les seconds de l'algorithme qui leur fera gagner en Bourse à coup sûr.

Transformer des données brutes en « or informationnel », tel est donc l'enjeu. Les chercheurs sont d'autant plus prêts à y participer que la raréfaction des budgets publics les incite à quêter le soutien du secteur privé, comme le note Michael Jordan, professeur d'informatique à l'université de Berkeley (Californie), qui a formé des bataillons de data scientists (spécialistes des données) pour Google, Facebook, Amazon, les assureurs et les banques. Mais en réalité, la plupart des entreprises sont loin d'atteindre ce but. « Elles en sont encore à résoudre des questions d'accessibilité à leurs propres données, tant les restructurations permanentes de leur périmètre entravent la mise en place d'un système d'information unique », observe Julien Laugel, de MFG Labs, une start-up récemment rachetée par Havas Media et qui vend aux entreprises des systèmes d'exploitation de données. Elles sont peu nombreuses à avoir franchi la seconde étape, celle de la sécurisation des données (indispensable pour conserver leur avantage concurrentiel). Elles le sont encore moins à utiliser ces données pour guider

leurs décisions... Et elles ne sont qu'une poignée à en retirer de la valeur. Ce qui ne les empêche pas, pourtant, de se ruer sur les solutions vendues par les prestataires de services.

« Il y a une sorte de "pensée magique" associée aux chiffres, dont l'exactitude paraît synonyme d'efficacité ; les volumes évoqués déclenchent des fantasmes d'omnipotence et d'omniscience », reconnaît Julien Laugel. Les promesses du big data font ainsi oublier que les données massives sont... des données, qui obéissent aux lois statistiques de marges d'erreur, d'intervalles de confiance et de fausses interprétations. Complication supplémentaire : l'apparition de structures de corrélations fortuites au sein de nuages de données massives accroît la tentation d'y déceler des causalités inexistantes. « Avec tant de points de mesure et donc tant de liens potentiels entre ces mesures, nos outils d'analyse statistique produisent des résultats dénués de sens », observe Alex Pentland, professeur de sciences des médias au Massachusetts Institute of Technology (MIT). A Berkeley, son alter ego Michael Jordan souligne un autre biais : à mesure que les individus prennent conscience de la valeur de leurs données, ils vont livrer des informations aux capteurs et aux réseaux avec un degré de sincérité de plus en plus sélectif.

Les internautes seront par exemple plus enclins à communiquer leurs données de santé à leur médecin que leurs goûts culinaires ou artistiques à Facebook. Déjà, ils cliquent ainsi régulièrement sur la page de désabonnement des sites des opérateurs téléphoniques, car ils savent que l'algorithme va automatiquement leur proposer une offre promotionnelle. Or, explique Michael Jordan, nous ne savons pas évaluer l'impact de l'insincérité des données sur les résultats offerts par le big data, précisément parce que le big data traite par définition toutes les données, même les fausses ! Le chercheur a également observé que la mise en parallèle d'ordinateurs de plus en plus nombreux et puissants pour traiter et modéliser l'information engendre un type spécifique d'erreurs. « Le big data reste pour l'instant l'apanage de

gens qui inventent et vendent des systèmes informatiques, mais qui n'affrontent pas les problèmes spécifiques posés par le traitement de données massives, observe-t-il. Nous n'avons pas encore de théorie bien affirmée pour penser les modèles construits à partir de ces données. Parfois, ça marchera, parfois non. »

Deux autres écueils, d'une nature cette fois purement mathématique, sont mis en avant par les experts. Le premier concerne ce qu'on appelle la « discrétisation » : il s'agit d'intégrer de la discontinuité dans des modèles mathématiques continus, ceux-là mêmes qu'utilisent les ordinateurs pour élaborer des modèles. Les effets dévastateurs de cette différence entre continuité supposée et discontinuité réelle ont été observés dans la finance à haute fréquence : la succession d'achats et de ventes de titres à la nanoseconde près selon un modèle continu a, dans la réalité discontinue, ruiné quelques investisseurs insouciant... Certes, les mathématiciens savent réintégrer de la discontinuité dans leurs modèles (c'est la « discrétisation »). Mais cette opération est délicate et parfois source de nouvelles erreurs.

L'autre problème mathématique tient au volume même des données. A l'école, on apprend à répartir des « objets » dans un espace construit selon deux paramètres, donc sur deux axes : l'abscisse et l'ordonnée. Les élèves des sections scientifiques planchent sur des espaces « vectoriels » à trois dimensions. Les cadors des mathématiques, eux, savent construire des espaces à dix, vingt, trente, cinquante dimensions, permettant de cartographier les relations entre des objets en fonction d'autant de paramètres. Mais avec les données massives, les objets se répartissent dans des espaces à 60, 70, 100 dimensions, voire plus. Il devient alors difficile d'identifier des structures entre des objets très « éloignés » les uns des autres, et d'en obtenir une visualisation perceptible à l'œil humain, a fortiori lorsque cet œil est managérial ou politique.

Ces craintes épistémologiques doucheront-elles l'enthousiasme d'entreprises et d'administrations qui pensent avoir trouvé la pierre philosophale ? Pas certain.

« *Le traitement des données massives peut engendrer des erreurs massives, et donc de mauvaises décisions d'une ampleur catastrophique* », affirme Michael Jordan. Le mathématicien redoute le triomphe de ce qu'il appelle « *la pensée informatique* » sur « *la pensée intuitive* ». Car la première, dit-il, ne sait pas prendre en compte la notion de risque. C'est pourquoi la présence de l'expert aux côtés de l'informaticien est indispensable.

Contrairement à ce que l'on lit dans de nombreux rapports, les entreprises n'ont pas besoin de recruter en masse des « *data scientists* », renchérit Frank Pacard. Il leur faut plutôt « *des experts de leur secteur d'activité ayant une compétence en informatique et en mathématiques qui soient capables d'expliquer quels sont les enjeux et les réalités de leur métier, de formuler les bonnes questions et éventuellement d'interpréter les structures qui apparaissent dans les «nuages» de données massives* ». Si les informaticiens et les financiers de l'entreprise deviennent les seuls interlocuteurs des prestataires du big data, les risques de dérapage seront multipliés.

Julien Laugel dit la même chose, mais autrement. Les données massives, remarque-t-il, ont « *un faible ratio signal/bruit* », c'est-à-dire que chacune d'entre elles offre une faible probabilité de présenter un intérêt pour l'utilisateur, et une

forte probabilité de n'avoir aucun sens. Même le fameux « like » de Facebook, qui permet à la firme américaine de gagner des millions auprès d'annonceurs fascinés, présente un défaut d'asymétrie d'information sous son apparente simplicité binaire. Si cliquer sur le pouce dressé (le 1) délivre un message clair (la personne aime), ne pas cliquer (le 0) est ambigu : n'aime-t-elle pas, ou n'a-t-elle pas vu, ou a-t-elle sciemment omis de donner son avis ? « *C'est typiquement le genre de situations où faire des extrapolations à partir de corrélations est extrêmement tentant... et dangereux.* »

La facilité pour les utilisateurs est alors de se réfugier derrière l'automatisation du traitement des données, c'est-à-dire de renoncer à exercer un choix humain parmi les données proposées. Or, cette automatisation oblige à « simplifier » les objets mathématiques pour faciliter leur mise en algorithme, et donc à privilégier leur similitude plutôt que leur différenciation. Au risque de renoncer à l'apport principal du big data : nous faire découvrir des réalités que nous ne soupçonnions pas.

Julien Laugel n'en reste pas moins convaincu : le big data ne sera pas une bulle et changera radicalement la gestion des affaires et de la décision publique. Mais il reste un long chemin à parcourir pour en dépasser les erreurs de jeunesse. « *Après le Far West des mathématiciens*

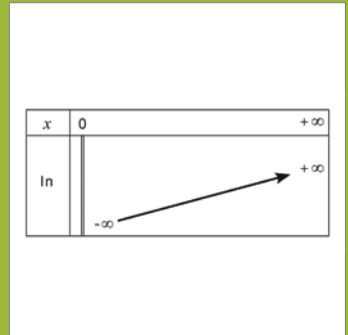
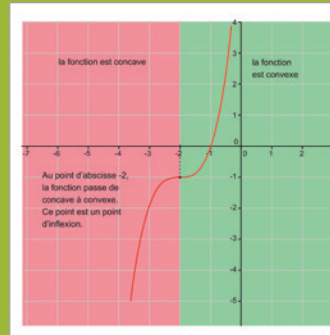
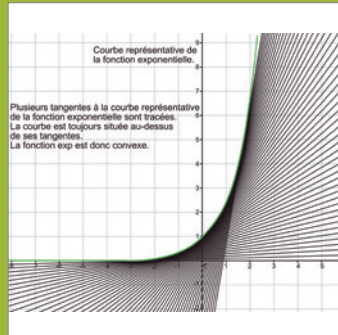
modélisateurs, la victoire reviendra, tôt ou tard, à celui qui aura le plus de données, prévoit-il. Nos clients les plus importants, les assureurs par exemple, ont des équipes de data scientists capables de comprendre les limites de leurs propres modèles. Nous savons aussi réintroduire dans nos modèles des données agrégées, ou des données extrêmes, qui rétablissent la robustesse de nos modèles. » La science des algorithmes progresse implacablement, dissipant les fantasmes tout en révélant l'ampleur de ce qui reste à accomplir.

En attendant, mieux vaut rester vigilant. A Trente, en Italie, les équipes du professeur du MIT Alex Pentland ont mené, avec les entreprises de la ville et la municipalité, une expérience de « *nouveau contrat social sur les données* ». Les habitants ont été invités, sur la base d'un « *consentement éclairé* », à livrer des données personnelles afin de participer à l'amélioration des politiques publiques : seules les informations nécessaires à ces politiques étaient demandées. Une façon élégante de ne pas céder à l'illusion lyrique du big data, ainsi résumée par Michael Jordan : « *Le problème, c'est qu'on ne sait pas de combien de données il faut disposer pour résoudre un problème.* » ●

Antoine Reverchon,
Le Monde daté du 31.10.2015

ANALYSE

```
def seuil(a, q):  
    n = 0  
    while q**n >= a :  
        n = n+1  
    return n
```



Suites

Un couple de lapins nés le premier janvier donne naissance à un autre couple de lapins, chaque mois, dès qu'il a atteint l'âge de deux mois. Les nouveaux couples suivent la même loi de reproduction. Combien y aura-t-il de couples de lapins le premier janvier de l'année suivante, en supposant qu'aucun couple n'ait disparu ? Pour résoudre ce problème, le mathématicien italien Fibonacci introduit dès 1202 la notion de suite. Ainsi, si on note u_n le nombre de couples de lapins au cours du mois (avec $u_1 = 1$), la suite (u_n) vérifie la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. On peut alors exprimer u_n en fonction de n et prévoir le nombre de lapins au bout de quelques mois.

Quand utiliser un raisonnement par récurrence et comment le rédiger ?

On peut utiliser un **raisonnement par récurrence** chaque fois qu'une propriété à démontrer dépend d'un entier naturel n , surtout lorsqu'il semble y avoir un lien simple entre ce qui se passe au rang n et ce qui se passe au rang $n+1$. Un raisonnement par récurrence se rédige en quatre étapes :

- on commence par énoncer la propriété à démontrer, en précisant pour quels entiers naturels cette propriété est définie ;
- **initialisation** : on vérifie que la propriété est vraie au rang initial (qui est souvent 0 ou 1) ;
- **hérédité** : on prouve le caractère héréditaire de la propriété. On suppose que la

propriété est vraie pour un entier n arbitrairement fixé et on démontre que la propriété est encore vraie au rang $n+1$;

- on conclut en invoquant le principe de récurrence.

Que faut-il savoir sur les suites géométriques ?

Une suite est géométrique quand on passe d'un terme au suivant en multipliant par le même facteur (la raison, notée q).

D'où la formule de récurrence donnée pour tout entier n : $u_{n+1} = u_n \times q$.

Le terme général d'une suite géométrique est : $u_n = u_0 \times q^n$.

Enfin la somme des $(n+1)$ premiers termes d'une suite géométrique $(u_0 + u_1 + \dots + u_n)$ de raison q différente de 1 est égale à :

$$u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Pour tout réel $q \neq 1$, on a : $1 + q + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Que faut-il savoir sur les suites arithmétiques ?

Une suite est arithmétique quand on passe d'un terme au suivant en ajoutant un même nombre (la raison, notée r).

D'où la formule de récurrence donnée pour tout entier n : $u_{n+1} = u_n + r$.

Le terme général d'une suite arithmétique est : $u_n = u_0 + nr$.

Cas particulier : pour tout réel n , on a : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Pour démontrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, on doit calculer $u_{n+1} - u_n$ et il faut que le résultat obtenu soit un nombre réel indépendant de n .

Comment calculer la limite de q^n lorsque $q > 0$?

Trois cas sont possibles :

- premier cas : si $0 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$;
- deuxième cas : si $q = 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$;
- troisième cas : si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

Comment déterminer la limite d'une suite ?

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 0$. La limite de la suite (u_n) dépend de son premier terme u_0 non nul et de sa raison q .

- Pour tout réel u_0 , si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et on dit que (u_n) converge.

MOTS CLÉS

SUITE

Une suite est une fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{N}$ ou sur une partie de $\mathbb{N}$.

TERME GÉNÉRAL

L'image d'un entier naturel n par la suite u se note u_n et s'appelle le terme général de la suite ou encore le **terme de rang n** .

SUITE CROISSANTE

Soit (u_n) une suite.

- La suite (u_n) est croissante si et seulement si pour tout entier

naturel n , $u_{n+1} \geq u_n$.

- La suite (u_n) est strictement croissante si et seulement si pour tout entier naturel n , $u_{n+1} > u_n$.

SUITE MONOTONE

On dit qu'une suite (u_n) est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

SUITE CONVERGENTE

On dit qu'une suite (u_n) est **convergente** vers le réel a lorsque tout intervalle ouvert contenant a

contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang.

On note alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$.

SUITE DIVERGENTE

Une suite qui n'est pas convergente est **divergente**.

Dire qu'une suite est divergente peut signifier :

- qu'elle n'a pas de limite (par exemple, la suite de terme général $u_n = \cos n$;
- que son terme général u_n tend vers l'infini quand n tend vers l'infini

(par exemple : la suite de terme général $u_n = n+1$).

RAISON D'UNE SUITE

– Dans une suite arithmétique, on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours un même nombre r , appelé **raison de la suite arithmétique**.

– Dans une suite géométrique, on passe toujours d'un terme au suivant en multipliant par un même nombre q , appelé **raison de la suite géométrique**.

- Si $u_0 > 0$ et si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et on dit que (u_n) diverge.
- Si $u_0 > 0$ et si $q < 1$, alors la suite n'a pas de limite.
- Si $u_0 < 0$ et si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ et on dit que (u_n) diverge.
- Si $u_0 < 0$ et si $q < -1$, alors la suite n'a pas de limite.

Pour étudier la limite d'une suite, on peut exprimer le terme général de la suite en fonction de n et déterminer la limite de ce terme en faisant tendre n vers l'infini.

On peut aussi utiliser les théorèmes de limite par comparaison :

- 1^{er} cas : Si $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.
- 2^e cas : Si $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- 3^e cas (Théorème des gendarmes) : Si $u_n \leq w_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L$.

Enfin, on sait que :

- Toute suite croissante majorée est convergente.
- Toute suite décroissante minorée est convergente.
- Une suite est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

Comment calculer la limite de la somme des premiers termes d'une suite géométrique ?

Exemple : Déterminer la limite de

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

1^{re} étape : On voit la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

On sait que : $S = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } S &= 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} \\ &= 2 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

2^e étape : Comme $0 < \frac{1}{2} < 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

3^e étape : Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S = 2 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$.

Propriété :

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et raison q telle que $0 < q < 1$.

Soit S la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (u_n) . Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S = \frac{u_0}{1 - q}$.

Qu'est-ce qu'une suite arithmético-géométrique ?

Définition : On dit qu'une suite (u_n) est une suite arithmético-géométrique s'il existe deux réels a et b tels que : u_0 étant donné, on a pour tout entier n : $u_{n+1} = au_n + b$.

Exemple : En 2000, la population d'une ville était de 5 200 habitants.

Chaque année, la population augmente de 2 % mais 150 habitants quittent la ville.

On note u_0 le nombre d'habitants en 2000, et u_n le nombre d'habitants en 2000 + n .

Démontrer que la suite (u_n) est une suite arithmético-géométrique.

On sait qu'une augmentation de 2 % correspond à un coefficient multiplicateur de :

$$1 + \frac{2}{100} = 1,02.$$

On a $u_0 = 5\,200$ et pour tout entier n :

$u_{n+1} = 1,02u_n - 150$.
La suite (u_n) est donc une suite arithmético-géométrique.

Cas particuliers :

- Si $b = 0$ et $a \neq 0$, alors la suite est une suite géométrique de raison a ;

- Si $a = 1$, alors la suite est une suite arithmétique de raison b .

Algorithmique

Étant donnée une suite (q^n) avec $0 < q < 1$, on veut élaborer un algorithme permettant de déterminer un seuil à partir duquel $q^n < a$, où a est un réel positif donné.

Déterminer un seuil revient à déterminer le plus petit entier n tel que $q^n < a$.

La condition d'arrêt revient à continuer à calculer q^n tant que $q^n \geq a$.

On a donc l'algorithme :

Entrées

Saisir a (nombre réel strictement positif)

Saisir q (nombre réel strictement compris entre 0 et 1)

Initialisation

n prend la valeur 0

Traitement

Tant que : $q^n \geq a$

n prend la valeur $n + 1$

Fin de tant que

Sortie

Afficher n

```
def seuil(a, q):
    n = 0
    while q**n >= a :
        n = n+1
    return n
```

Exemple :

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = 0,9^n$.

(u_n) est strictement décroissante, car $0 < q < 1$ et $u_0 = 0,9$.

Pour déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 0,01$, on exécute le programme. Dans l'algorithme, on tape seuil (0,01, 0,9) et on obtient 44.

UN ARTICLE DU MONDE À CONSULTER

La divine proportion p. 50
(Étienne Ghys, *Le Monde* daté du 11.04.2013)

ZOOM SUR...

LIMITE D'UNE SOMME

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) =$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$

LIMITE D'UN PRODUIT

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	l	$l \neq 0$	$l \neq 0$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) =$	$l \times l'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

LIMITE D'UN INVERSE

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	$l \neq 0$	0^+	0^-	$\pm\infty$
Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v_n} =$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0

LIMITE D'UN QUOTIENT

On a : $\frac{u_n}{v_n} = u_n \times \frac{1}{v_n}$, donc on revient à la règle du produit.

THÉORÈME DE LIMITES PAR COMPARAISON

– Si $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

– Si $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

THÉORÈME DES GENDARMES

Si $u_n \leq w_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L$.

Limites de fonctions

Déterminer les limites éventuelles d'une fonction n'a d'intérêt que lorsque x tend vers une borne ouverte de l'ensemble de définition D_f de f .

Opérations sur les limites

Soit f une fonction définie au voisinage de a (où a est un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$).

Limite d'une somme en a

Si f a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Si g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f+g$ a pour limite	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

Limite d'un produit en a

Si f a pour limite	l	$l \neq 0$	$l \neq 0$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Si g a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $f \times g$ a pour limite	$l \times l'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Limite de l'inverse en a

Si g a pour limite	$l \neq 0$	0^+	0^-	$\pm\infty$
Alors $\frac{1}{g}$ a pour limite	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0

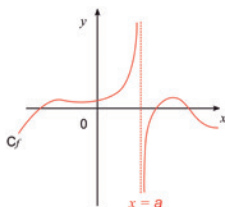
Comment lever une forme indéterminée ?

Les « FI » du paragraphe précédent signifient que l'on ne peut pas conclure directement : on est en présence d'une forme indéterminée. Les formes indéterminées sont : $+\infty - \infty$, $\infty \times 0$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$.

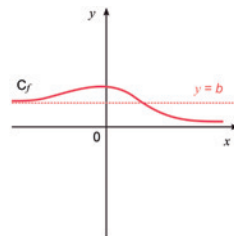
Pour « lever » cette indétermination, il faut transformer l'écriture de la fonction.

Les deux astuces les plus courantes sont la factorisation de l'expression ou l'utilisation de la forme conjuguée.

Comment détermine-t-on la présence d'asymptotes à la courbe d'une fonction ?



Asymptote verticale d'équation $x = a$
lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$.



Asymptote horizontale d'équation $y = b$
lorsque $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$.

Comment déterminer la limite d'une fonction en utilisant la comparaison ?

On peut utiliser l'un des trois théorèmes de limite par comparaison.

Soient f , g et h trois fonctions définies au voisinage de α , et l un nombre réel.

1^{er} cas : Si $g(x) \leq f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = -\infty$.

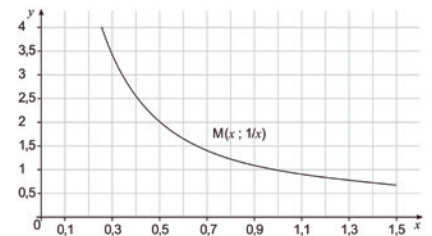
2^e cas : Si $g(x) \leq f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = +\infty$.

3^e cas : Théorème des « gendarmes »

Si $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} h(x) = l$.

Quelles sont les limites en 0 et en l'infini de la fonction inverse ?

La **fonction inverse** est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$, et se représente par une branche d'hyperbole.



L'inéquation $\frac{1}{x} > 10^n$ a pour solution $x < 10^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Donc pour n aussi grand que l'on veut, c'est-à-dire 10^n aussi grand que l'on veut, il est toujours possible de trouver x proche de 0 tel que $\frac{1}{x}$ soit supérieur à 10^n .

Lorsque x tend vers 0, par comparaison avec 10^n , $\frac{1}{x}$ tend vers $+\infty$.

On a donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

L'inéquation $\frac{1}{x} < 10^{-n}$ pour solution $x > 10^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Donc pour n aussi grand que l'on veut, c'est-à-dire 10^{-n} aussi petit que l'on veut, il est toujours possible de trouver x proche de l'infini tel que $\frac{1}{x}$ soit inférieur à 10^{-n} .

Lorsque x tend vers $+\infty$, par comparaison avec 10^{-n} , $\frac{1}{x}$ tend vers 0.

On a donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Quelles sont les limites en l'infini des fonctions carré, cube et racine carrée ?

La **fonction racine carrée** définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ se représente par une demi-parabole.

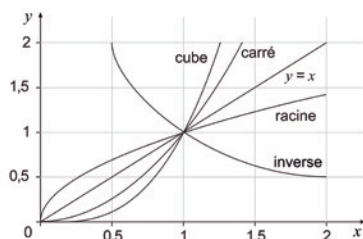
L'inéquation $\sqrt{x} > 10^n$ a pour solution $x > 10^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Donc pour n aussi grand que l'on veut, c'est-à-dire 10^n aussi grand que l'on veut, il est toujours possible de trouver x proche de l'infini tel que $\sqrt{x}$ soit supérieur à 10^n .

Lorsque x tend vers $+\infty$, par comparaison avec 10^n , $\sqrt{x}$ tend vers $+\infty$.

On a donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

En observant la représentation graphique sur $[1; +\infty[$ des fonctions racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$, carré $x \mapsto x^2$ et cube $x \mapsto x^3$, on obtient : $\sqrt{x} < x^2 < x^3$, pour tout $x \in [1; +\infty[$.



De plus, comme on a montré que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, alors, d'après le théorème de comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$.

Quelle est la limite en l'infini d'une fonction polynôme ?

Exemple : La fonction polynôme f de degré 3, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3$.

En factorisant l'expression par x^3 , on obtient :

$$f(x) = x^3 \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^3} \right).$$

Lorsque x tend vers l'infini, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^3} \right) = 2$. Donc, par produit, on

obtient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

La limite de la fonction f , à l'infini, est donc la limite du terme $2x^3$.

Propriété : Lorsque x tend vers l'infini, la limite d'une fonction polynôme est la limite de son terme de plus haut degré.

Quelles sont les limites pour les valeurs interdites et en l'infini des fonctions rationnelles ?

Exemple : La fonction rationnelle f , définie sur $]1; +\infty[$, par $f(x) = \frac{2x+5}{x-1}$.

En factorisant puis en simplifiant l'expres-

sion par x , on obtient : $f(x) = \frac{2 + \frac{5}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$.

Lorsque x tend vers l'infini, on a

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{5}{x} \right) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right) = 1$. Donc, par

quotient, on obtient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

La limite de la fonction f , à l'infini, est donc la limite du quotient $\frac{2x}{x}$.

Propriété : Lorsque x tend vers l'infini, la limite d'une fonction rationnelle est la limite

du quotient de ses termes de plus haut degré.

La fonction f n'est pas définie pour $x = 1$.

Lorsque x tend vers 1^+ , on a $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x+5) = 7$ et

$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0^+$. Donc, par quotient, on obtient :

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$.

Propriété : Lorsque x tend vers une valeur interdite de l'ensemble de définition, on calcule les limites du numérateur et du dénominateur, et on applique « $\frac{1}{0} = \pm\infty$ ».

Quelle est la limite en l'infini de la fonction exponentielle ?

On sait que, pour tout réel x , on a : $x < e^x$.

De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$.

Donc, en utilisant le théorème de comparaison, on obtient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

UN ARTICLE DU MONDE À CONSULTER

La question démographique sert d'excuse p. 51

(Propos recueillis par Catherine Vincent et Stéphane Foucart, *Le Monde* daté du 09.12.2017)

MOTS CLÉS

FORME INDÉTERMINÉE

Dans un calcul de limites, on a une « forme indéterminée » lorsque l'on ne peut pas conclure directement.

Pour « lever » cette indétermination, il faut transformer l'expression de la fonction :

- en factorisant par le terme de plus haut degré (on utilise cette méthode pour lever des indéterminations dans le cas de fonctions polynômes ou rationnelles pour des limites en $+\infty$ ou en $-\infty$;

- en utilisant la quantité conjuguée (on utilise cette méthode pour lever des indéterminations dans le cas de fonctions racine carrée le plus souvent).

ASYMPTOTE

- Si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \pm\infty$, alors la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x = \alpha$.

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, alors la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y = b$, en l'infini.

THÉORÈME DES GENDARMES

Si $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \lim_{x \rightarrow \alpha} g(x) = l$, alors $\lim_{x \rightarrow \alpha} h(x) = l$.

Le théorème est valable pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = +\infty$ ou $\alpha = -\infty$.

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

La limite est une notion qui a été au centre de l'Analyse, mais qui n'a été formalisée que très tard.

Zénon d'Élée (450 av. J.-C.) est le philosophe dont les paradoxes contiennent les prémices du concept de limite, et de façon sous-jacente, du concept d'indivisible, c'est-à-dire de particule infiniment petite, provenant de la célèbre théorie atomistique de Démocrite.

L'indivisible est un concept historiquement très important. Il se trouve pourtant discrédité lors de la formalisation des mathématiques, et ne sera réhabilité qu'au xx^e siècle.

De nombreux mathématiciens, comme Bl. Pascal, savent traduire le langage des infiniment petits par des termes très proches de notre conception actuelle de la limite. À l'inverse, Newton rejette les indivisibles et essaie de défendre, avec confusion, la notion de limite.

Il a fallu que la rigueur devienne

indispensable au progrès, alors que les problèmes qui se posaient étaient de plus en plus subtils et difficiles, pour que Gauss, et surtout Cauchy, commencent à chercher cette notion avec précision.

C'est finalement Karl Weierstrass qui donne notre définition actuelle de la limite.



Portrait de Carl Friedrich Gauss par Gottlieb Biermann.

Compléments sur la dérivation

Le concept de dérivée a été dégagé il y a environ trois siècles. Il est lié, en mathématiques, à la notion de tangente à une courbe, et en sciences physiques, à celle de vitesse instantanée d'un mobile. Les calculs de dérivées ont de nombreuses applications. Ils permettent notamment de déterminer les variations d'une fonction, de résoudre des problèmes d'optimisation, ou encore de calculer certaines limites.

Qu'est-ce qu'une fonction dérivable en un point ?

Une fonction f est **dérivable** en un réel a de son ensemble de définition si le taux de variation entre a et $a + h$ admet une limite finie lorsque h tend vers 0. Dans ce cas, cette limite réelle est appelée « le **nombre dérivé** de f en a » et se note $f'(a)$. Par définition, on a :
$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$
 Lorsque ce nombre existe, $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a . Une fonction f est dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en tout réel $a \in I$, et on appelle « **fonction dérivée** de f » la fonction qui, à tout réel $x \in I$, associe le réel $f'(x)$.

Quelles sont les dérivées usuelles à connaître ?

Voici un tableau qui récapitule les dérivées vues en classe de Première avec : u et v deux

fonctions dérivables sur un intervalle de l'ensemble des réels, a , b et λ trois nombres réels quelconques.

Fonction f	Dérivée f'	Intervalle de validité pour x
$x \mapsto \lambda$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto ax + b\lambda$	$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0 ; +\infty[$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$
$x \mapsto x^n$, où $n \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$ si $n \geq 0$ $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$
λu	$\lambda u'$	$\mathcal{D}_u$

Fonction f	Dérivée f'	Intervalle de validité pour x
$u + v$	$u' + v'$	$\mathcal{D}_u \cap \mathcal{D}_v$
$u \times v$	$u'v + uv'$	$\mathcal{D}_u \cap \mathcal{D}_v$
u^n , où $n \in \mathbb{Z}$	$nu'u^{n-1}$	$\mathcal{D}_u$ si $n \in \mathbb{N}$ pour les valeurs de $\mathcal{D}_u$ n'annulant pas u , si $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$
$\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$	pour les valeurs de $\mathcal{D}_v$ n'annulant pas v
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	pour les valeurs de $\mathcal{D}_v$ n'annulant pas v
$u \circ v$	$v' \times (u' \circ v)$	pour $x \in \mathcal{D}_v$ et u dérivable en $v(x)$

Quelles sont les nouvelles dérivées à connaître ?

- La dérivée de la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ est la fonction $x \mapsto e^x$.
- Pour toute fonction u dérivable sur un intervalle I , on a : $(e^u)' = u'e^u$.
- Pour tout réel $x > 0$, la dérivée de la fonction logarithme népérien $x \mapsto \ln x$ est la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.
- Pour toute fonction u dérivable et strictement positive sur un intervalle I , on a : $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.
- Pour tout réel x , on a : $\cos'x = -\sin x$ et $\sin'x = \cos x$.
- Pour toute fonction dérivable u , on a : $\cos'u = -u'\sin u$ et $\sin'u = u'\cos u$.

MOTS CLÉS

FONCTION DÉRIVABLE EN UN POINT

- Soit f une fonction définie sur un intervalle I , et $a \in I$.
- La fonction f est **dérivable en a** si et seulement s'il existe un réel, noté $f'(a)$ tel que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

FONCTION DÉRIVÉE

Une fonction f est **dérivable** sur un intervalle I si et seulement si elle est dérivable en tout point de I . Alors, la

fonction qui à tout réel $x \in I$ associe le nombre dérivé de f en x est appelée **fonction dérivée** de f . Elle se note f' .

DÉRIVÉES SUCCESSIVES

- Soit f une fonction dérivable sur I .
- Sa fonction dérivée f' s'appelle dérivée première de f .
 - Si f' est dérivable sur I , sa dérivée f'' s'appelle dérivée seconde de f .
 - Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$, la dérivée n -ième de la fonction f est la

dérivée de la dérivée d'ordre $(n - 1)$ de f .

TANGENTE À UNE COURBE

Si une fonction f est dérivable en a , alors C_f admet, au point A d'abscisse a , une **tangente** passant par A , de coefficient directeur $f'(a)$. Une **équation de cette tangente** est $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

POINT D'INFLEXION

Le point A est un **point d'inflexion** de C_f si et seulement si la dérivée seconde de f s'annule en changeant de signe en l'abscisse du point A .

FONCTION CONCAVE

- Une fonction est **concave** sur I lorsque la courbe C_f est en dessous de chacune de ses tangentes.
- Une fonction f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante (ou $f'' < 0$) sur l'intervalle I .

Quelle est l'équation de la tangente à une courbe en un point où la fonction est dérivable ?

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors le nombre dérivé de f en $a \in I$, noté $f'(a)$, est le coefficient directeur de la tangente T à la courbe représentative C de f au point d'abscisse a .

Une équation de T est donc : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Comment détermine-t-on le sens de variation d'une fonction dérivable sur un intervalle ?

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . On note f' sa dérivée sur I .

- Si $f' = 0$ sur I , alors f est constante sur I .
- Si $f' > 0$ (respectivement $f' < 0$) sur I , sauf éventuellement en un nombre fini de points isolés, alors f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur I .
- Si f admet un extremum en a , alors $f'(a) = 0$.

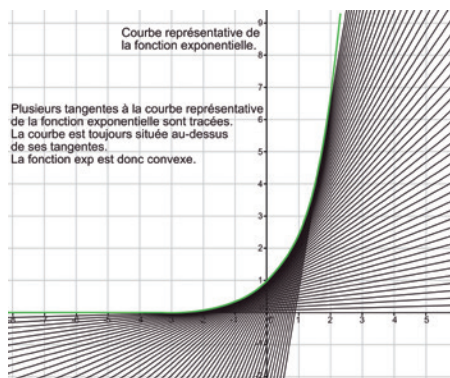
Comment peut-on définir une fonction convexe et une fonction concave ?

Approche graphique

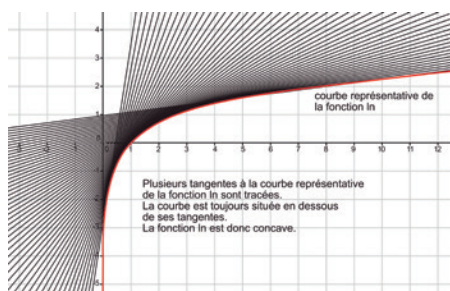
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

On dit qu'une fonction est convexe sur I lorsque la courbe représentative de la fonction f est entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.

Par opposition, on dit qu'une fonction est concave sur I lorsque la courbe représentative de la fonction f est entièrement en dessous de chacune de ses tangentes.



Fonction convexe.



Fonction concave.

Convexité et sens de variation de la dérivée

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

La fonction f est convexe sur I si et seulement si sa dérivée f' est croissante sur I .

La fonction f est concave sur I si et seulement si sa dérivée f' est décroissante sur I .

Convexité et signe de la dérivée seconde

Si on peut dériver deux fois une fonction f sur un intervalle, la fonction obtenue se nomme « **dérivée seconde de f** » et on la note f'' .

Soit f une fonction dérivable deux fois sur un intervalle I .

La fonction f est convexe sur I si et seulement si sa dérivée seconde est positive sur I .

La fonction f est concave sur I si et seulement si sa dérivée seconde est négative sur I .

Qu'est-ce qu'un point d'inflexion ?

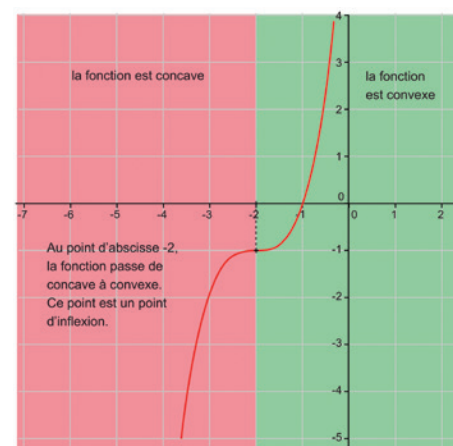
Approche graphique

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

Soit A un point de la courbe représentative C_f de la fonction f , tel que l'abscisse du point A appartienne à I .

On dit que le point A est un point d'inflexion de C_f lorsque C_f traverse sa tangente en A .

En l'abscisse du point A , la fonction f passe de concave à convexe (ou de convexe à concave).



Point d'inflexion.

Point d'inflexion et dérivée seconde

Soit f une fonction dérivable deux fois sur un intervalle I .

Soit A un point de la courbe représentative C_f de la fonction f , tel que l'abscisse du point A appartienne à I .

On dit que le point A est un point d'inflexion de C_f si et seulement si la dérivée seconde de f s'annule en changeant de signe en l'abscisse du point A .

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

FONCTION CONVEXE

- Une fonction est **convexe** sur I lorsque la courbe C_f est au-dessus de chacune de ses tangentes.
- Une fonction f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante (ou $f'' > 0$) sur l'intervalle I .

Historiquement, la notion de fonction a émergé parallèlement au calcul différentiel, sous différents aspects : courbes représentatives, formules algébriques, lois de mouvement. Le concept de dérivée est basé sur le point de vue cinématique. Ainsi, on a pu entrevoir le nombre dérivé comme vitesse instantanée d'un mobile se déplaçant sur un axe. C'est d'ailleurs l'origine de la formalisation du calcul différentiel d'Isaac Newton. Même avant Newton, la représentation cinématique est la source

principale de la notion de dérivée. Son aspect intuitif, en lien avec la physique et les vitesses de mouvement, a aidé Galilée pour utiliser l'équation différentielle $y' = Ct$. La dérivation est également très utile dans la résolution de problèmes d'optimisation. Kepler observe (même si les astronomes babyloniens l'avaient vu avant lui) que la variation d'une fonction est particulièrement lente au voisinage d'un maximum. Fermat s'intéresse à ce type de problème et se sert de cette méthode pour

retrouver les lois de Descartes sur la réfraction.

Le point de vue global de l'étude de la dérivation permet d'obtenir l'aspect algorithmique du calcul des dérivées, mais il néglige les difficultés qui peuvent se poser aux points singuliers.

Malgré le texte de d'Alembert qui expose avec clarté le concept de limite et la façon dont s'en déduit celui de nombre dérivé, il faut attendre le XIX^e siècle pour que la limite soit mise au premier plan.

Continuité des fonctions d'une variable réelle

L'objectif principal est de découvrir la notion de continuité et de l'utiliser pour résoudre des équations. La notion de continuité permet d'énoncer le théorème des valeurs intermédiaires. Ce dernier sert notamment à déterminer le nombre de solutions d'une équation du type $f(x) = k$ (où $k \in \mathbb{R}$ et f est une fonction continue), ainsi qu'à en donner une valeur approchée ou un encadrement. Ceci est surtout intéressant lorsque l'on ne sait pas résoudre algébriquement une telle équation.

Qu'est-ce qu'une fonction continue ?

Approche graphique

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que la fonction f est continue sur I lorsque sa courbe représentative se trace « sans lever le crayon ».

Propriétés :

- Les fonctions de référence (affines, carré, cube, inverse, racine carrée) sont continues sur leur ensemble de définition.
- Les fonctions construites à partir des fonctions de référence sont continues sur leur ensemble de définition.
- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.

Exemples : La fonction f définie pour tout

réel x par $f(x) = 2x^3 + 5x^2 - x + 1$ est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme.

La fonction f définie pour tout réel $x \neq 3$ par

$f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$, car c'est une fonction rationnelle dont le dénominateur s'annule pour $x = 3$.

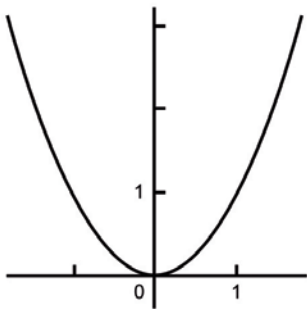
Approche algébrique

Définition : Soient f définie sur un intervalle I , et $a \in I$. On dit que f est continue en a si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

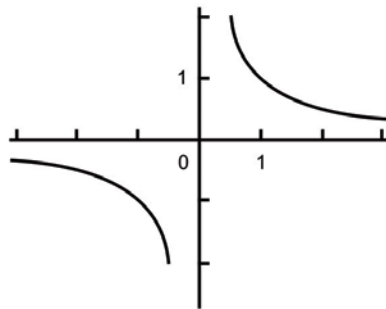
Exemple : Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$

$$\text{par : } \begin{cases} g(x) = x - 3 \text{ si } x < 0 \\ g(x) = x + 1 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

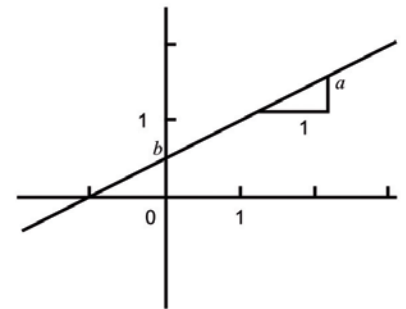
Exemples de fonctions continues.



La fonction carré $x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$



La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $]0; +\infty[$ mais pas sur $\mathbb{R}$



Une fonction affine $x \mapsto ax + b$ est continue sur $\mathbb{R}$

L'image de 0 par la fonction g existe, alors $g(0) = 0 + 1 = 1$.

De plus, d'après la définition de la fonction g , on peut calculer les limites à gauche et à droite de $x = 0$.

$$\text{On a : } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g(x) = -3 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = 1.$$

Comme les limites ne sont pas les mêmes, on en déduit que la fonction g n'est pas continue en 0.

Quelle est la propriété des valeurs intermédiaires ?

Propriété fondamentale des fonctions continues

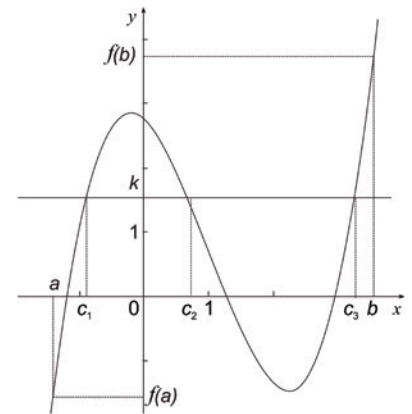
On considère un intervalle I et deux nombres réels a et b appartenant à I .

Soit f une fonction continue sur I .

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Interprétation graphique

Si la fonction f est continue, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors la droite d'équation $y = k$ coupe au moins une fois la courbe représentative de la fonction f . De plus, ce point d'intersection est un point dont l'abscisse est comprise entre a et b .



Interprétation grâce aux équations

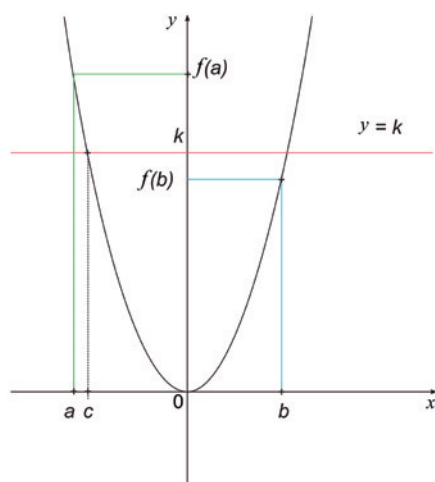
Si la fonction f est continue, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution comprise entre a et b .

Cas particulier : si la fonction est continue et strictement monotone sur l'intervalle I

On considère un intervalle I et deux nombres réels a et b appartenant à I .

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I .

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique comprise entre a et b .



Fonction continue et strictement monotone sur I .

Suites récurrentes d'ordre 1

Théorème : Soit f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ telle que pour tout entier naturel n , $u_n \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si (u_n) converge vers un réel l appartenant à l'intervalle I , alors $f(l) = l$.

Exemple : Soit (v_n) une suite définie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ par $v_{n+1} = \frac{1}{v_n + 1}$ et telle que $v_0 = 2$. On peut montrer rapidement que (v_n) est strictement positive ainsi que strictement décroissante pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors, on sait que la suite (v_n) est convergente vers un réel $l > 0$.

De plus, en résolvant l'équation $\frac{1}{l+1} = l$, et en gardant uniquement la racine positive (car $l > 0$), on montre que $l = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Donc la suite (v_n) converge vers le réel $l = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Déterminer une valeur approchée de la (ou des) solution(s) d'une équation

Il existe plusieurs méthodes permettant de déterminer la valeur approchée d'une solution d'une équation : le balayage, la dichotomie, les sécantes, etc.

La méthode de Newton, quant à elle, utilise le principe de la dérivation.

Voici un programme en langage Python qui

correspond à cette méthode :

```
def newton(f,df,x0,epsilon) :
    x=x0
    y=x-f(x)/df(x)
    while abs(y-x)>epsilon:
        x=y
        y=y-f(y)/df(y)
    return y
```

Dans ce programme : f est une fonction ; df est la dérivée de la fonction f ; x_0 est le réel initial et $epsilon$ est un paramètre de précision.

Par exemple, si nous entrons en amont du programme ceci :

```
def f(x) :
    return 0.25*x**2-x-1

def df(x) :
    return 0.5*x-1
```

Lorsque l'on exécute le programme et que l'on tape dans la console `newton(f, df, 3,0.001)` alors l'affichage final sera : 4.828427125049864.

UN ARTICLE DU MONDE À CONSULTER

La musique sous la baguette d'un compositeur artificiel p. 54
(Benoît Crépin, *Le Monde* daté du 12.07.2017)

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

En mathématiques, la continuité est une propriété topologique d'une fonction. Tout d'abord, une fonction f est continue si à des variations infinitésimales de la variable x correspondent des variations infinitésimales de la valeur $f(x)$.

La continuité est associée à d'autres notions dont l'origine est le plus souvent géométrique. Dans un plan ou dans l'espace, un point peut se déplacer de manière continue pour s'approcher avec une certaine précision d'un autre point.

La notion de continuité a été définie ultérieurement de manière plus rigoureuse par les mathématiciens.

Le premier exemple connu de fonctions continues concerne des

fonctions réelles définies sur un intervalle et dont la représentation graphique peut se tracer sans lever le crayon. Cette première approche donne une idée de la notion : la fonction ne doit pas « sauter ». Cependant, ce n'est pas suffisant pour définir précisément la notion de continuité, d'autant plus que certains graphes de fonctions pourtant continues ne peuvent pas se tracer de cette manière, comme l'escalier de Cantor (défini avec des fractales). L'étude des fonctions continues se révèle très intéressante, notamment pour les propriétés que possèdent ces fonctions : propriété de convergence, théorème des valeurs intermédiaires, intégrabilité, etc.



Augustin-Louis Cauchy.



Leonhard Euler.

Fonction logarithme

La fonction logarithme népérien est très utile pour simplifier certaines expressions mathématiques. Elle permet de convertir une multiplication en addition, une division en soustraction, une puissance en multiplication, une racine en division. Elle offre également la possibilité de résoudre des équations ou des inéquations contenant des exponentielles ou encore dont l'inconnue, qui est un nombre entier, figure en exposant.

Comment peut-on définir la fonction logarithme népérien ?

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est la seule fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ qui à tout réel x strictement positif associe l'unique solution de l'équation d'inconnue y : $e^y = x$.

On note alors cette solution : $y = \ln x$.

D'après cette définition, on remarque que la fonction logarithme népérien est définie comme la fonction réciproque de la fonction exponentielle, étudiée en classe de Première.

Conséquences :

Pour tout $x > 0$, on a :

- $y = \ln x$ si et seulement si $x = e^y$;
- $e^{\ln x} = x$.

Pour tout réel y , $\ln(e^y) = y$.

$$\ln 1 = 0 ; \ln e = 1 ; \ln \frac{1}{e} = -1.$$

Quelles sont les variations de la fonction logarithme népérien ?

Fonction dérivée

Pour tout réel x strictement positif, on a : $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

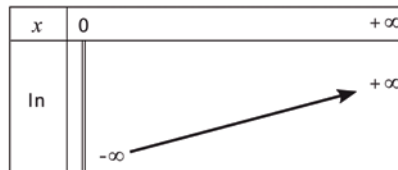
Remarque : La fonction logarithme népérien se définit aussi comme étant l'unique primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$, qui s'annule lorsque $x = 1$.

Tableau de variations

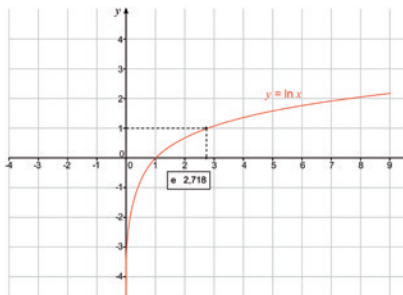
Pour tout réel x strictement positif, on a : $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$.

La fonction logarithme népérien est donc strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

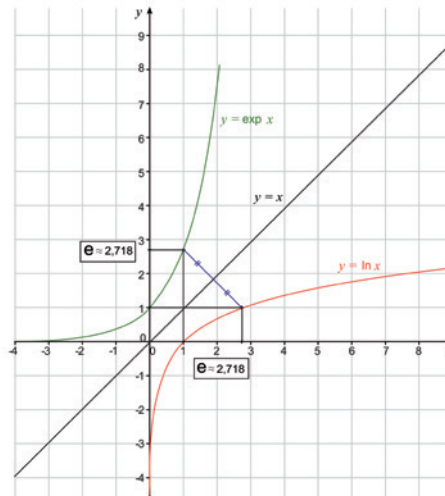
De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.



Courbe représentative



Les courbes représentatives des fonctions $\ln$ (logarithme népérien) et $\exp$ (exponentielle) sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Étude de la fonction composée $\ln \circ u$

Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I , alors la fonction composée $\ln \circ u : x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I , et on a :

$$(\ln \circ u)' = (\ln(u))' = \frac{u'}{u}.$$

Quelles propriétés algébriques de la fonction $\ln$ faut-il connaître ?

Relation fonctionnelle

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs, on a : $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Exemple : $\ln 6 = \ln(2 \times 3) = \ln 2 + \ln 3$.

Propriétés

Pour tous nombres réels a et b strictement positifs, pour tout nombre entier n , on a :

- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$;
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$;
- $\ln(a^n) = n \times \ln(a)$;
- $\ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \ln(a)$.

Exemple : $\ln 3 + \ln 4 + \ln \frac{1}{12} =$

$$\ln(3 \times 4) - \ln(12) = \ln 12 - \ln 12 = 0.$$

Comment peut-on étudier une fonction contenant un logarithme népérien ?

Dérivation de fonction contenant $\ln$

La fonction étudiée peut être une fonction de référence : polynôme, rationnelle ou autre, comportant en plus la notation $\ln x$.

On doit alors se rappeler que : pour tout réel $x > 0$, on a $\ln(x)' = \frac{1}{x}$.

La fonction étudiée peut aussi être une fonction de référence : polynôme, rationnelle ou autre, composée avec la fonction logarithme népérien.

On doit alors se rappeler que : pour toute fonction u strictement positive et dérivable sur un intervalle I , on a : $(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Lorsque la fonction est plus complexe, on a souvent recours à une fonction auxiliaire pour connaître le signe de la dérivée de la fonction donnée.

Étude de limites particulières contenant la fonction logarithme népérien

Nombre dérivé en 1 de la fonction logarithme népérien : $\ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$.

Par définition de la dérivée, on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{1+h-1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1.$$

Ainsi, on a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Pour calculer la limite usuelle de $\frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$, on remarque que la fonction $x \mapsto \ln x$ croît infiniment moins vite que la fonction $x \mapsto x$.

Ainsi, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$, et plus généralement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0^+$ (pour $\alpha > 0$).

Pour calculer la limite usuelle de $x \ln x$ en 0^+ , on utilise la limite de $\frac{\ln x}{x}$ en $+\infty$, en effectuant le changement de variable : $X = \frac{1}{x}$. Ainsi, on a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$.

Comment résoudre une équation ou une inéquation avec la fonction ln ?

Soient a et b deux nombres réels strictement positifs.

- $\ln a = \ln b$ si et seulement si $a = b$;
- $\ln a < \ln b$ si et seulement si $a < b$;
- $\ln a > \ln b$ si et seulement si $a > b$.

Exemple : $\ln(3x+1) > 2\ln 2 \Leftrightarrow \ln(3x+1) > \ln 4$
 $\Leftrightarrow 3x+1 > 4 \Leftrightarrow 3x > 3 \Leftrightarrow x > 1$.

Algorithme de Briggs

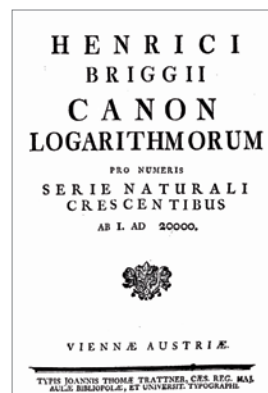
Le programme suivant permet de déterminer une valeur approchée du logarithme népérien d'un réel strictement positif x (avec une certaine précision notée epsilon).

Par exemple, si l'on exécute le programme et que l'on tape dans la console `briggs(3,0.001)` alors l'affichage sera `1.098907006638001` alors que $\ln 3 \approx 1,0986122886681$.

Soit une erreur d'environ 0,0003.

```
from math import*

def briggs(x,epsilon):
    n=0
    while abs(x-1)>epsilon:
        x=sqrt(x)
        n=n+1
    return (x-1)*2**n
```



UN ARTICLE DU MONDE À CONSULTER

Les barreaux irréguliers de l'échelle de Richter p. 56
 (Jonathan Parienté, *Le Monde* daté du 04.03.2010)

ZOOM SUR...

LA FONCTION LOGARITHME DÉCIMAL

Définition

La fonction logarithme décimal est la fonction, notée $\log$, définie sur $]0; +\infty[$ par : $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

Variation

Comme la fonction $\ln$ est strictement croissant sur $]0; +\infty[$ et $\ln 10 > 0$, alors la fonction $\log$ est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et $\log 1 = 0$.

Remarque

La fonction logarithme décimal était très utilisée pour de nombreux calculs numériques avant l'introduction des calculatrices. Cette fonction a aussi de nombreuses applications, notamment en chimie et en physique.

PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES DE LA FONCTION LOG

Pour tous nombres réels strictement positifs a et b , et tout nombre entier n , on a :

- $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$;
- $\log\left(\frac{1}{b}\right) = -\log(b)$;
- $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$;
- $\log(a^n) = n \times \log(a)$;
- $\log(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \log(a)$.

LIMITES DE LA FONCTION LOG

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$
 et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x = +\infty$.

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS

Pour tous réels strictement positifs a et b , $\log a = \log b \Leftrightarrow a = b$.

Pour tout réel strictement positif x et tout réel a , $\log x = a \Leftrightarrow x = 10^a$.

En particulier, on a : $\log(10^n) = n \log 10 = n$, car $\log 10 = 1$.

FONCTION INVERSE DU LOGARITHME DÉCIMAL

La fonction inverse du logarithme décimal est la fonction, définie sur $\mathbb{R}$, par : $x \mapsto 10^x = e^{x \ln 10}$. Elle est appelée exponentielle de base 10.

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

La naissance des logarithmes et des exponentielles a lieu tout au long du XVII^e siècle.

Cela commence par la création de tables de logarithmes, permettant d'effectuer les calculs astronomiques qui se développent à l'époque. En effet, ce sont des outils qui facilitent les calculs de produits et de quotients. Après de nombreuses recherches effectuées conjointement avec Neper, Briggs présente les tables de calculs du logarithme pour tous les entiers de 1 à 20 000, et de 90 000 à 100 000. Pour construire ces tables, il utilise deux techniques, l'une utilisant les puissances et l'autre utilisant des racines carrées successives.

La découverte des logarithmes s'est ensuite poursuivie lors des tentatives de calcul d'aire sous des hyperboles, notamment sous l'hyperbole d'équation $xy = 1$, entre les points d'abscisse a et b . Ce calcul d'aire s'appelle aujourd'hui quadrature de l'hyperbole et s'exprime sous la forme $\ln b - \ln a$. Les fonctions exponentielle et logarithme deviennent des incontournables lors des problèmes liés au calcul différentiel et aux intégrales,

notamment avec les recherches de Leibniz. En effet, celui-ci montre le lien entre les problèmes de quadratures et le problème inverse des tangentes, qui sont une utilisation très importante des logarithmes.

À la fin du XVII^e siècle, une fois que les techniques du calcul intégral sont bien établies, les logarithmes ont permis d'intégrer des fonctions rationnelles (après les avoir décomposées en éléments simples), ce qui a conduit à la dernière découverte : celle du logarithme d'un nombre complexe.



Portrait de Jean Neper.

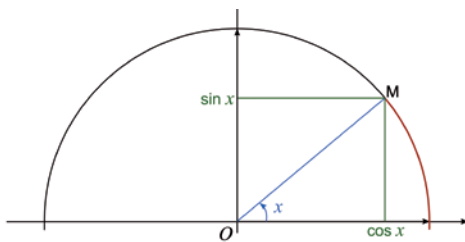
Fonction sinus et cosinus

Parmi l'ensemble des fonctions étudiées, les fonctions sinus et cosinus présentent des particularités spécifiques, notamment la périodicité. L'étude de ces fonctions sur une période permet d'obtenir la représentation graphique de toute la fonction. On pourra retrouver graphiquement les propriétés du sinus et du cosinus d'un angle étudiées en classe de Première.

Comment peut-on définir les fonctions trigonométriques ?

Définition : Soit un réel x . On note M le point du cercle trigonométrique correspondant à un angle orienté de x rad.

- Le **cosinus** de x , noté $\cos x$, est l'abscisse de M .



- Le **sinus** de x , noté $\sin x$, est l'ordonnée de M . On a les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Pour tout réel x , on a :

- $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$
- $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$

Définition : La **fonction cosinus**, notée $\cos$, est la fonction qui à tout réel x associe le nombre réel $\cos x$.

La **fonction sinus**, notée $\sin$, est la fonction qui à tout réel x associe le nombre réel $\sin x$.

Quelles sont les règles de dérivation des fonctions trigonométriques ?

Propriétés : Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur l'ensemble des réels.

Pour tout réel x , $(\cos x)' = -\sin x$ et $(\sin x)' = \cos x$.

Soient a et b deux nombres réels. Pour tout réel x , $(\cos(ax + b))' = -a \sin(ax + b)$ et $(\sin(ax + b))' = a \cos(ax + b)$.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\cos(4x + 5)$.

La dérivée de la fonction f est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = -12\sin(4x + 5)$.

Que sait-on sur la parité et la périodicité des fonctions sinus et cosinus ?

Propriété : Pour tout réel x :

- $\cos(-x) = \cos x$, la fonction cosinus est paire ;
- $\sin(-x) = -\sin x$, la fonction sinus est impaire ;
- $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π . (On dit aussi qu'elles sont 2π -périodiques).

Propriété : Soit a un nombre réel.

Les solutions de l'équation $\cos x = \cos a$ sont les réels de la forme :

$$a + 2k\pi \text{ ou } -a + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Les solutions de l'équation $\sin x = \sin a$ sont les réels de la forme :

$$a + 2k\pi \text{ ou } \pi - a + 2k\pi, \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Quelles sont les formules d'addition et de duplication ?

Soient a et b deux nombres réels, on a :

- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$

Quelles sont les limites usuelles ?

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

Quelles sont les variations ?

Sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, la fonction cosinus a le tableau de variations suivant :

x	$-\pi$	0	π
Signe de $\cos'x$	0	+	-
Variations de $\cos$	1	0	-1

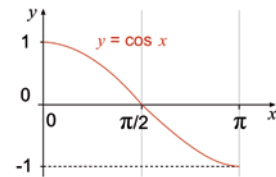
Sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, la fonction sinus a le tableau de variations suivant :

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $\sin'x$	-	0	+	0	-
Variations de $\sin$	0	-1	0	1	0

Quelles sont les représentations graphiques sur $[0, \pi]$ et sur $\mathbb{R}$?

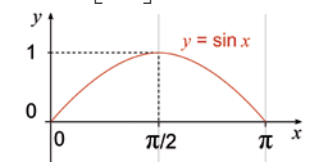
La fonction cosinus

La fonction cosinus est décroissante sur $[0, \pi]$.



La fonction sinus

La fonction sinus est croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, décroissante sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.



Comme les fonctions sinus et cosinus sont 2π -périodiques, on obtient les courbes complètes des fonctions cosinus et sinus en effectuant des translations de vecteurs $\pm 2\pi i$.



Comment peut-on résoudre $\cos x = a$ ou $\cos x \leq a$?

Propriété : Soit a un nombre réel. Sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, l'ensemble des solutions de

l'équation d'inconnue x , $\cos x = a$ dépend de la valeur de a .

- Si $a \in [-1, 1]$, alors il existe un unique réel $b \in [0, \pi]$ tel que $\cos b = a$.
- On a alors : $\cos x = a \Leftrightarrow x = b$ ou $x = -b$.
- Si $a \notin [-1, 1]$, alors $\cos x = a$ n'admet aucune solution réelle et l'ensemble des solutions est l'ensemble vide.

Exemple : Résolvons dans $[-\pi, \pi]$ l'équation $\cos x = 0,5$. On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0,5$. Donc :

$$\cos x = 0,5 \Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{3}.$$

Ainsi l'ensemble des solutions est

$$S = \left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}.$$

Propriété : Soit a un nombre réel. Sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, l'ensemble des solutions de l'inéquation d'inconnue x , $\cos x \leq a$ dépend de la valeur de a .

- Si $a < -1$, alors l'inéquation n'admet aucune solution réelle et l'ensemble des solutions est l'ensemble vide.
- Si $a > 1$, alors l'inéquation a comme ensemble de solutions l'intervalle $[-\pi, \pi]$.
- Si $a \in [-1, 1]$, alors il existe un unique réel $b \in [0, \pi]$ tel que $\cos b = a$.
- On a alors : $\cos x \leq a \Leftrightarrow x \in [-\pi, -b] \cup [b, \pi]$.

Exemple : Résolvons dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$. On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{Donc : } \cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x \leq \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right].$$

Ainsi l'ensemble des solutions est

$$S = \left[-\pi, -\frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right].$$

UN ARTICLE DU MONDE À CONSULTER

Un ordinateur dans votre poche p. 57
(Jean-Marc Chabanas, *Le Monde* daté du 15.09.1973)

MOTS CLÉS

CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

Lorsqu'une unité de longueur a été fixée, on appelle cercle trigonométrique tout cercle de rayon 1 (unité), muni d'un point d'origine (le centre du cercle) et d'un sens de rotation, appelé sens direct (le plus souvent, c'est le sens inverse des aiguilles d'une montre).

FONCTIONS COSINUS ET SINUS

Soit $\mathcal{C}$ un cercle trigonométrique de centre O . Soient A et B les points de $\mathcal{C}$ tel que le repère $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ soit orthonormal et de sens direct.

Soit x un réel et M le point de $\mathcal{C}$ associé à ce réel x , alors :

- le cosinus de x , noté $\cos x$, est l'abscisse du point M dans le repère $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$;
- le sinus de x , noté $\sin x$, est l'ordonnée du point M dans le repère $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

FONCTION PAIRE

Une fonction f est paire si et seulement si, quel que soit le réel $x \in \mathcal{D}_f$, on a $-x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = f(x)$.

Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées dans un repère orthogonal.

FONCTION IMPAIRE

Une fonction f est impaire si et seulement si, quel que soit le réel $x \in \mathcal{D}_f$, on a $-x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = -f(x)$. Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

FONCTION PÉRIODIQUE

Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est périodique de période $T > 0$, si et seulement si, pour tout réel x , on a $f(x + T) = f(x)$.

TRANSLATION

Une translation est une transformation géométrique qui déplace tous les points d'un objet géométrique de la même distance, selon la même direction et dans le même sens, c'est-à-dire suivant un même vecteur (précisé lorsque l'on définit la translation).

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

– L'utilisation la plus ancienne du sinus apparaît dans des écrits en indien vers le ^{II}^e siècle av. J.-C. Le sinus de $\frac{\pi}{4}$ est correctement calculé, même si le sens général du sinus n'est pas développé.

– Hipparque (^{II}^e siècle av. J.-C.) est le premier mathématicien à disposer de tables trigonométriques qui lui servent à estimer des grandeurs d'astronomie.

– Ptolémée (au ^{II}^e siècle) poursuit le travail d'Hipparque en établissant des égalités de rapport, équivalentes aux actuelles formules d'addition. Il dresse une table trigonométrique très complète.

– Au ^V^e siècle, en Inde, le sinus est défini pour la première fois au sens général, c'est-à-dire à partir de la relation entre la moitié d'un angle et la moitié d'une corde. Le cosinus, initialement appelé le contre-sinus, est lui aussi défini comme l'inverse du sinus.

– De nombreux approfondissements sont apportés à ces définitions : par les mathématiciens du monde arabe (complément de l'astronomie), par les Indiens (développements en séries infinies), par les

disciples de l'école du Kerala (développements en série de π , etc.), et par Rheticus qui fait le lien avec le triangle rectangle vers le ^{XVI}^e siècle.

– Enfin, Moivre et Euler relient les fonctions trigonométriques avec les actuels nombres complexes. Cela permet de retrouver des formules de trigonométrie, en incluant le nombre imaginaire i .

– Ainsi, les procédés par lesquels les mathématiciens ont construit et tabulé les fonctions trigonométriques illustrent les liens importants entre discret et continu. Ces travaux indiquent une perception intuitive claire des questions de convergence.



Hipparque.

Primitives, équations différentielles

En pratique, déterminer une primitive d'une fonction, c'est chercher une fonction dont la dérivée est la fonction donnée. Pour une fonction puissance, ou plus généralement une fonction polynôme, cette détermination est facile : il suffit d'augmenter d'une unité l'exposant. C'est plus difficile dans le cas d'une fonction rationnelle ; en particulier, la recherche d'une primitive de la fonction inverse conduit à une définition de la fonction logarithme népérien. Le calcul intégral et la résolution d'équations différentielles sont les applications directes de la détermination de primitives.

Comment reconnaître une primitive d'une fonction ?

Trouver une primitive d'une fonction f , c'est trouver une fonction dont la dérivée est la fonction f donnée.

Propriété : Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $[a; b]$. F est une primitive de f si et seulement si pour tout $x \in [a; b]$, $F'(x) = f(x)$.

Propriété : Il existe une infinité de primitives d'une fonction donnée. Elles sont définies à une constante près. Si F est une primitive de f , alors pour tout $c \in \mathbb{R}$, $F + c$ est aussi une primitive de f .

Opérations et primitives usuelles

Propriété :

- Si F et G sont des primitives respectivement des fonctions f et g sur un intervalle I , alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .
- Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I , et c un réel, alors $c \times F$ est une primitive de $c \times f$ sur I .

On a le tableau des primitives usuelles suivant :

Primitives des fonctions usuelles : avec $C \in \mathbb{R}$

$f(x)$	$F(x)$	D_f
k avec $k \in \mathbb{R}$	$kx + C$	$\mathbb{R}$
x^n avec $n \neq -1$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$ avec $n \neq 1$	$-\frac{1}{n-1} \frac{1}{x^{n-1}} + C$	$] -\infty; 0[\cup] 0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	$] 0; +\infty[$
e^x	$e^x + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + C$	$] 0; +\infty[$

Quelles sont les primitives des fonctions polynômes ?

Propriété : Les fonctions puissance définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, ont pour primitives les fonctions $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Une fonction polynôme est la somme de fonctions puissance. Pour en trouver une primitive, il suffit de chercher une primitive de chacun des termes.

Exemple : Soit $f(x) = x^2 + 2x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$. Une primitive de f est $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + x = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$.

Quelles sont les primitives des fonctions inverse ?

On peut généraliser aux exposants entiers relatifs n , $n \neq -1$, la forme générale des primitives des fonctions puissances.

Propriété : Les fonctions inverses, définies sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x^n$, n entier négatif, $n \neq -1$, ont pour primitives les fonctions $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, sur $] -\infty; 0[$ ou $] 0; +\infty[$.

Propriété : Sur $] 0; +\infty[$, la fonction logarithme népérien est la primitive F de la fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ telle que $F(1) = 0$.

Comment calculer une primitive d'une fonction composée ?

Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = u'(x) \times (u(x))^n$, $n \in \mathbb{N}$, ont pour primitives les fonctions $F(x) = \frac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Les fonctions définies pour $u(x) \neq 0$ par $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ ont pour primitives les fonctions $F(x) = \ln(u(x)) + C$, $C \in \mathbb{R}$.

Comment déterminer une primitive d'une fonction rationnelle ?

Pour déterminer une primitive d'une fonction rationnelle, on décompose celle-ci en une somme d'une fonction polynôme et d'une fonction inverse.

Exemple : Soit $f(x) = \frac{x^2+2}{x-3}$ définie sur $] 3; +\infty[$. Elle peut s'écrire sous la forme : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-3}$.

On réduit au même dénominateur : $f(x) = \frac{(ax+b)(x-3)+c}{x-3}$.

On développe le numérateur : $f(x) = \frac{ax^2 + (b-3a)x - 3b + c}{x-3}$.

Par identification des coefficients des termes de même degré du numérateur, on obtient le système :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 3a = 0, \text{ donc } a = 1, b = 3 \text{ et } c = 11. \\ -3b + c = 2 \end{cases}$$

On a donc $f(x) = x + 3 + \frac{11}{x-3}$.

On en déduit une primitive $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3x + 11 \ln|x-3| = \frac{x^2}{2} + 3x + 11 \ln(x-3)$, car $x-3 > 0$ sur $] 3; +\infty[$.

Qu'est-ce qu'une équation différentielle ?

Les équations différentielles sont des égalités dans lesquelles apparaissent une fonction et au moins l'une de ses dérivées successives. L'ordre de l'équation est égal au rang le plus élevé de la dérivée.

Les équations différentielles trouvent des applications en économie, en physique et en biologie.

Comment résoudre une équation différentielle de premier ordre sans second membre ?

Une équation différentielle de premier ordre sans second membre est de la forme $f'(x) + af(x) = 0$ ($a \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$).

De manière simplifiée, ces équations s'écrivent : $y' + ay = 0$.

Résoudre cette équation, c'est déterminer toutes les fonctions f qui conviennent.

On a : $y' + ay = 0 \Leftrightarrow \frac{y'}{y} = -a$, car $y \neq 0$.

Une primitive de $\frac{y'}{y}$ est $\ln|y|$, alors on a : $\ln|y| = -ax + C$ ($C \in \mathbb{R}$), soit $e^{\ln|y|} = e^{-ax+C}$
 $\Leftrightarrow |y| = e^{-ax} \times e^C \Leftrightarrow y = \pm e^C \times e^{-ax}$.

En posant $\lambda = e^C$ (ou $-e^C$), on en déduit la famille des fonctions solutions : $y = \lambda e^{-ax}$.

La constante λ est déterminée par l'image d'une valeur particulière de la variable.

Exemple : Soit l'équation différentielle $y' = 5y$, et soit $c \in \mathbb{R}$.

$$y' = 5y \Leftrightarrow y' - 5y = 0 \Leftrightarrow y = \lambda e^{5x}.$$

Ainsi les fonctions numériques y à une variable x qui vérifient $y' = 5y$ sont les fonctions définies pour tout réel x par $y(x) = \lambda e^{5x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si, de plus, $y(2) = 1$, alors $\lambda e^{5 \times 2} = 1 \Leftrightarrow \lambda = e^{-10}$. Dans ce cas, l'unique solution est la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = e^{5x-10}$.

Comment résoudre une équation différentielle de premier ordre avec second membre ?

Une équation différentielle du premier ordre avec second membre se présente sous

la forme : $y' + ay = \Phi(x)$, où Φ est une fonction de variable x .

Pour résoudre cette équation, on cherche une solution particulière y_1 dont la forme sera donnée par l'énoncé.

Les solutions de l'équation sont alors de la forme : $y = \lambda e^{-ax} + y_1$.

Exemple 1 : Soit l'équation différentielle : $y' = 5y + 3$.

Une solution particulière y_1 est, par exemple, $y_1 = -\frac{3}{5}$.

Les solutions de $y' = 5y$ sont les fonctions y telles que $y(x) = \lambda e^{5x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ainsi, les solutions de l'équation différentielle $y' = 5y + 3$ sont les fonctions y définies pour tout réel x par $y(x) = -\frac{3}{5} + \lambda e^{5x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple 2 : Soit l'équation différentielle : $y' = 5y + e^{2020x}$.

On va chercher une solution particulière y_1 sous la forme $y_1 = \alpha(x)e^{5x}$, avec α une fonction que l'on va déterminer. $y_1'(x) = \alpha'(x)e^{5x} + 5\alpha(x)e^{5x}$.

Donc $\alpha'(x)e^{5x} + 5\alpha(x)e^{5x} = 5\alpha(x)e^{5x} + e^{2020x}$
 $\Leftrightarrow \alpha'(x)e^{5x} = e^{2020x}$.

$$\text{Donc } \alpha'(x) = \frac{e^{2020x}}{e^{5x}} = e^{2015x} \Leftrightarrow \alpha(x) = \frac{1}{2015} e^{2015x}.$$

$$\text{Ainsi } y_1(x) = \frac{1}{2015} e^{2015x} e^{5x} = \frac{1}{2015} e^{2020x}.$$

Les solutions de $y' = 5y$ sont les fonctions y telles que $y(x) = \lambda e^{5x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ainsi, les solutions de l'équation différentielle $y' = 5y + e^{2020x}$ sont les fonctions y définies pour tout réel x par

$$y(x) = \frac{1}{2015} e^{2020x} + \lambda e^{5x}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

UN ARTICLE DU MONDE À CONSULTER

Le « terroriste » dans l'avion était un économiste avec une équation différentielle p. 58
 (Le Monde daté du 08.05.2016)

ZOOM SUR... LES PRIMITIVES

FONCTION DÉRIVÉE

Une fonction f est **dérivable** sur un intervalle I si et seulement si elle est dérivable en tout point de I . Alors la fonction qui, à tout réel $x \in I$, associe le nombre dérivé de f en x est appelée **fonction dérivée** de f et se note f' .

PRIMITIVE

Soit f une fonction définie continue sur un intervalle I . Une primitive de la fonction f sur I est une fonction F dérivable sur I telle que, pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

LIEN ENTRE CONTINUITÉ ET PRIMITIVE

Toute fonction f continue sur un intervalle I admet une primitive F sur l'intervalle I .

PLUSIEURS PRIMITIVES POUR UNE MÊME FONCTION F

— Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I , alors toutes les primitives de la fonction f sur I sont les fonctions $x \mapsto F(x) + C$, où C est une constante réelle quelconque.

— Soit I un intervalle contenant une valeur x_0 , et y_0 un réel connu. Il existe une unique primitive F de la fonction f sur I vérifiant la condition : $F(x_0) = y_0$.

PRIMITIVES ET OPÉRATIONS

— Soient F et G des primitives respectives des fonctions f et g sur l'intervalle I . Alors $F + G$ est une primitive de la fonction $f + g$ sur l'intervalle I .

— Soient F une primitive de f sur un intervalle I , et k un nombre réel. Alors $k \times F$ est une primitive de la fonction $k \times f$ sur l'intervalle I .

TABLEAUX DES PRIMITIVES USUELLES

Soient x un nombre réel, n un entier relatif et u une fonction, on a :

$f(x)$	Une primitive $F(x)$
a (constante)	ax
x	$\frac{1}{2}x^2$
$x^n, n > 0$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x^n}, n \geq 2$	$-\frac{1}{n-1} \frac{1}{x^{n-1}}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x, x > 0$
e^x	e^x

Fonction f	Une primitive F
$u'u^n, n > 0$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1}$
$\frac{u'}{u^n}, n \geq 2$	$-\frac{1}{n-1} \frac{1}{u^{n-1}}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u, u > 0$
$u'e^u$	e^u

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

Le calcul différentiel s'est développé de concert avec la physique au ^{xvi}^e siècle. Parmi les initiateurs, Fermat, Huygens, Pascal et Barrow reconnaissent que le problème des aires (le calcul intégral) est le problème inverse de celui des tangentes (la dérivation). De plus, ils remarquent que le calcul différentiel peut être abordé à partir des travaux sur la quadrature de l'hyperbole, et qu'ils tournent tous autour de la question de « l'infiniment petit » qu'ils ne savent pas encore justifier.

Les travaux de Newton et Leibniz révèlent, par la suite, deux visions différentes du calcul infinitésimal. En effet, Newton aborde souvent les mathématiques du point de vue physique (il compare la notion actuelle de limite avec la notion de vitesse instantanée, ce qui lui permet de négliger les quantités infinitésimales), alors que Leibniz l'aborde de façon philosophique (il travaille en parallèle sur l'existence de l'infiniment petit dans l'univers). La justification de telles méthodes nécessite donc une mise au point de la notion de limite qui reste intuitive à cette époque.

Des fondations solides sont finalement proposées dans le *Cours d'Analyse* de Cauchy (1821, 1823) qui définit précisément la notion de limites et en fait le point de départ de l'analyse.

Parallèlement, les résolutions d'équations différentielles, provenant de la mécanique ou des mathématiques, se structurent, notamment grâce au lien entre le calcul différentiel et les séries (Newton, Euler, d'Alembert, Lagrange, Cauchy, etc.), ce qui illustre les ponts entre le discret et le continu.

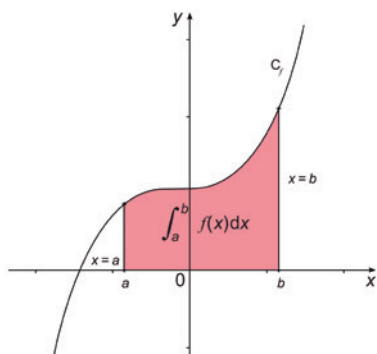
Calcul intégral

Pour calculer l'aire de la surface comprise entre une courbe et l'axe des abscisses, on peut approcher cette surface par une série de bandes rectangulaires de largeur infinitésimale. L'intégrale de la fonction représentée par cette courbe est égale, au signe près, à la somme de leurs aires. L'intégration est donc un outil précieux pour calculer l'aire de surfaces délimitées par des courbes dont on connaît les équations, mais aussi les volumes dont on connaît des éléments du solide. Cette branche des mathématiques a de nombreuses utilisations en physique et en économie.

Comment approcher graphiquement une intégrale ?

Soient f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$, et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

L'intégrale de a à b de la fonction f est l'aire du domaine situé entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, exprimée en unités d'aire. Cette intégrale se note $\int_a^b f(x) dx$.



Dans un repère orthogonal (O, I, J) , on considère le point K de coordonnées $(1, 1)$.

Une unité d'aire représente l'aire du rectangle OIKJ.

Remarques :

- La variable x est une variable « muette », donc elle n'intervient pas dans le résultat. On peut la remplacer par n'importe quelle autre variable.
- Le dx indique la variable d'intégration et représente une grandeur infinitésimale.

Comment calculer une primitive et une intégrale ?

Une intégrale, lorsqu'elle existe, est une valeur réelle.

Si une fonction f est continue sur un intervalle $[a; b]$, alors elle admet une primitive F telle que, pour tout $x \in [a; b]$, $F'(x) = f(x)$.

On a alors : $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemple : $\int_1^2 2x dx = [x^2]_1^2 = 2^2 - 1^2 = 3$.

Quelles sont les propriétés de l'intégrale ?

Propriétés :

- $\int_a^a f(x) dx = 0$.

• **Relation de Chasles :** Si une fonction f est définie, continue et dérivable sur un intervalle $[a; b]$, et si $c \in [a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

Justification : si F est une primitive de f :

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx.$$

Propriété : Si une fonction f est définie, continue et dérivable sur un intervalle $[a; b]$, alors $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$.

Propriété (Linéarité de l'intégrale) : soient α et λ deux nombres réels, f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$. Alors :

$$\int_a^b (\alpha f + \lambda g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \lambda \int_a^b g(x) dx.$$

Quelle est la formule de l'intégration par parties ?

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , dont les fonctions dérivées u' et v' sont elles-mêmes continues sur I . Soient a et b deux réels appartenant à I , tels que $a < b$. Alors :

$$\int_a^b u(x) \times v'(x) dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \times v(x) dx.$$

MOTS CLÉS

INTÉGRALE

Lorsqu'une fonction f est continue sur un intervalle I , si on a deux réels a et b appartenant à I , alors $\int_a^b f(x) dx$ est égale au réel $F(b) - F(a)$, avec F primitive de f sur I .

AIRE SOUS UNE COURBE

Lorsqu'une fonction f est continue et positive sur un intervalle $[a; b]$, l'intégrale $\int_a^b f(x) dx$ correspond à « l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$ ». Elle est égale à l'aire de la partie du plan

comprise entre $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$, en unités d'aire.

UNITÉ D'AIRES (UA)

Dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, une unité d'aire est l'aire du rectangle formé avec les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

PRIMITIVE

On appelle primitive de la fonction f sur l'intervalle I toute fonction F dérivable sur I et dont la dérivée sur I est la fonction f .

RELATION DE CHASLES

Si une fonction f est définie, continue et dérivable sur un intervalle $[a; b]$, et si $c \in [a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

LINÉARITÉ DE L'INTÉGRALE

soient α et λ deux nombres réels, f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$. Alors $\int_a^b (\alpha f + \lambda g)(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \lambda \int_a^b g(x) dx$.

INTÉGRATION PAR PARTIES

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , dont les fonctions dérivées u' et v' sont elles-mêmes continues sur I . Soient a et b deux réels appartenant à I , tels que $a < b$. Alors : $\int_a^b u(x) \times v'(x) dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \times v(x) dx$.

Cette propriété permet de simplifier des calculs d'intégrales et d'établir des relations de récurrence entre des termes d'une suite d'intégrales.

Exemple : On souhaite calculer $\int_0^1 x e^x dx$.
On ne connaît pas de primitives de la fonction f définie par $f(x) = x e^x$.

On va donc poser $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$. Les fonctions u et v sont bien dérivables, et de dérivée continue sur $\mathbb{R}$.

On a : $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$.

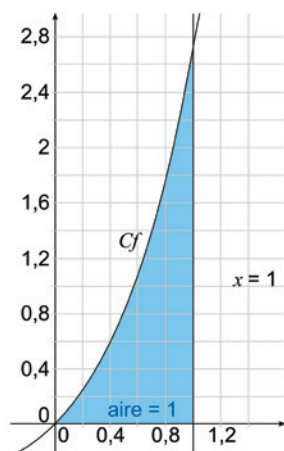
En appliquant l'intégration par parties, on a :

$$\int_0^1 x e^x dx = \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 1 \times e^x dx.$$

$$\text{Donc } \int_0^1 x e^x dx = (1 \times e^1 - 0 \times e^0) - \left[e^x \right]_0^1 =$$

$$e - (e^1 - e^0) = 1.$$

Comme la fonction f est positive sur $[0; 1]$, on vient de calculer l'aire de la surface située sous la courbe $\mathcal{C}_f$, au-dessus de l'axe des abscisses, et entre l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$.



Comment peut-on comparer des intégrales ?

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a; b]$.

Propriétés :

- **Positivité :** pour tout $x \in [a; b]$, si $f(x) \geq 0$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

- **Croissance :** pour tout $x \in [a; b]$, si

$f(x) \geq g(x)$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

- **Encadrement :** soient m et M deux réels tels que, pour tout $x \in [a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

Comment calcule-t-on la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle ?

Propriété : Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

Si f est une fonction positive, définie et dérivable sur un intervalle $[a; b]$, il existe un rectangle de largeur $b - a$ et de hauteur m qui a pour aire $A = \int_a^b f(x) dx$.

Autrement dit, on a : $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$, qui est la valeur moyenne de f sur $[a; b]$.

Exemple : En cinématique, si v représente la vitesse d'un mobile à un instant t , pour $t_1 \leq t \leq t_2$, alors $\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$ représente la vitesse moyenne du mobile entre les instants t_1 et t_2 .

Comment fonctionne la méthode des rectangles ?

Plusieurs algorithmes existent pour déterminer une valeur approchée de l'intégrale d'une fonction sur un intervalle. La méthode des rectangles est un incontournable, car elle est en réalité la base de la création du calcul intégral. Dans le cas d'une fonction f positive sur un intervalle $[a; b]$, pour approcher l'aire située sous la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[a; b]$, on va découper l'intervalle $[a; b]$ en n morceaux (qui seront donc

d'amplitude $\frac{b-a}{n}$).

On va alors calculer la somme pour k allant de 0 à $n-1$ des aires des n rectangles de largeur $\frac{b-a}{n}$ et de hauteur $f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$. Plus n sera grand, plus la somme va se rapprocher de la valeur exacte de l'intégrale de f sur $[a; b]$.

En langage Python, cela donne, lorsque l'on teste avec $f(x) = x^2$:

```
def f(x):
    return x**2

def rectangle(f,a,b,n):
    h=(b-a)/n
    s=0
    for i in range(n):
        s=s+f(a+i*h)*h
    return s
```

```
>>> rectangle(f, 0, 1, 15)
0.30074074074074075
>>> rectangle(f, 0, 1, 100)
0.32835000000000014
>>> rectangle(f, 0, 1, 1000)
0.33283350000000034
>>> rectangle(f, 0, 1, 10000)
0.33328333334999745
```

On exécute le programme et, dans la console, on tape par exemple `rectangle(f,0,1,15)`. On obtient un nombre proche de 0,3. Ce qui n'est pas si éloigné de la valeur exacte $\frac{1}{3}$. En augmentant les valeurs de n , on constate que la somme se rapproche bien de $\frac{1}{3}$.

UN ARTICLE DU MONDE À CONSULTER

Calculs astronomiques à Babylone p. 59
(Denis Delbecq, *Le Monde* daté du 03.02.2016)

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

L'histoire des mathématiques doit beaucoup à la théorie de l'intégration, et la place prédominante de celle-ci a façonné l'analyse.

Les « méthodes intégrales » en Grèce antique attestent de cette place prépondérante même s'il a fallu attendre le calcul infinitésimal pour une première formalisation. Les méthodes intégrales avaient cependant déjà donné de beaux résultats, car les Athéniens ont évalué les grandeurs de l'espace puis en ont démontré implicitement l'existence et l'unicité.

Au XVII^e siècle apparaissent enfin des méthodes générales de « calcul de l'infini » (rectification de courbes, quadratures, etc.), ainsi que la méthode des indivisibles de Cavalieri.

Leibniz rédige le fondement de la théorie de l'intégration (*Geometria recondita*, 1686), encore perpétué aujourd'hui. Ses écrits sont composés d'un symbolisme reliant intégration et dérivation, et des principaux théorèmes d'intégration.

La formalisation de cette théorie aboutit tardivement à cause de la

complexité des problèmes soulevés : que sont les fonctions ? les réels ? (ces questions restent sans réponse jusqu'au développement de l'analyse au XIX^e siècle) ; ou encore quelles fonctions peut-on intégrer ? (question de l'intégrabilité qui est liée à des problèmes de convergence).

L'intégrale de Riemann puis celle de Lebesgue (XIX^e siècle) ont marqué les mathématiques par leur formalisation aboutie. L'intégration est encore un sujet pour la recherche contemporaine,

comme en témoignent des extensions : intégrale d'Itô, intégrale de Kurzweil-Henstock, construction de Bongiorno.



Portrait de Leibniz.

Suites

Sujet 1. Suites récurrentes d'ordre 1. D'après sujet Bac S, Amérique du Sud, novembre 1994

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à termes positifs, telle que $u_0 = 5$ et vérifiant pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq 4$.
2. On se propose, dans cette question, d'étudier de deux manières la convergence de cette suite.

Méthode 1.

- a. Démontrer que la suite est décroissante.
- b. Dédire de ce qui précède que la suite est convergente, puis trouver sa limite.

Méthode 2.

- a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - 4 \leq \frac{1}{4}(u_n - 4)$.
- b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n - 4 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.
- c. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

LA BONNE MÉTHODE

1. On peut procéder par récurrence en utilisant le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x + 12}$.
2. **Méthode 1. a.** Il y a de nombreuses façons de résoudre cette question. On peut procéder par récurrence ou évaluer le signe de $u_{n+1} - u_n$, par exemple.
- b.** La suite est décroissante et minorée. S'agissant de la limite λ , il va s'agir de justifier qu'elle est solution de l'équation $x = \sqrt{x + 12}$, et qu'elle est supérieure ou égale à 4.
- Méthode 2. a.** On va utiliser la méthode dite de la quantité conjuguée
- b.** On va procéder par récurrence.
- c.** On doit penser au théorème des gendarmes.

Sujet 2. Suite divergente. D'après sujet Bac S, Polynésie, juin 2012

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
- a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq n$.
- b. Justifier que la suite (u_n) est croissante.
- c. Déterminer la limite de la suite (u_n) .
2. Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$,

$u_n \geq 10^p$? L'ensemble des entiers n_0 tels que $n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq 10^p$ est donc un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$, ce sous-ensemble admet donc un plus petit élément m_0 . On s'intéresse maintenant au plus petit entier m_0 .

3. Proposer un script en Python qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier m_0 tel que $n \geq m_0 \Rightarrow u_n \geq 10^p$. Déterminer à l'aide du programme cet entier m_0 pour la valeur $p = 3$.

LA BONNE MÉTHODE

1. On remplace n par 0 puis par 1 dans la relation définissant la suite.
2. **a.** On procède, comme l'énoncé le demande, par récurrence. On prend bien soin d'argumenter correctement l'hérédité.
- b.** On évalue le signe de $u_{n+1} - u_n$ à la lumière de ce qui précède.
- c.** On utilise le théorème de comparaison.
3. Il faut revenir à la définition du résultat obtenu à la question précédente.
4. Il s'agit d'un algorithme dit de seuil, on construit une boucle *tant que*.

Limites des fonctions

Sujet 1

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{1-x}$.

1. Vérifier que pour tout réel x , on a $f'(x) = e \times \frac{x}{e^x}$.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
3. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
4. Déterminer la dérivée de la fonction f .
5. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$, puis dresser le tableau de variations.

PARTIE B

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les fonctions g_n et h_n définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \text{ et } h_n(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}.$$

1. Vérifier que pour tout réel x , $(1-x)g_n(x) = 1 - x^{n+1}$.

On obtient alors, pour tout réel x ff 1 :

$$g_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

2. Comparer les fonctions h_n et g'_n , g'_n étant la dérivée de g_n . En déduire que, pour tout

$$\text{réel } x \neq 1 : h_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

3. Soit $S_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$, f étant la fonction définie dans la partie A.

En utilisant les résultats de la partie B, déterminer une expression de S_n puis sa limite quand n tend vers $+\infty$.

LA BONNE MÉTHODE

PARTIE A

1. Utiliser les règles de calcul de la fonction exponentielle.
2. Limite par produit et composition de fonctions.
3. Utiliser le résultat de la question 1, sachant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
4. Dériver un produit de fonctions.
5. Étudier le signe de la dérivée et faire le tableau de variations.

PARTIE B

1. Remplacer $g_n(x)$ et développer.
2. Utiliser la dérivée du quotient de deux fonctions. Remarquer une égalité grâce au résultat du 1.
3. Introduire dans S_n la fonction $f(x) = xe^{1-x}$, puis remarquer l'égalité avec $h_n(e^{-1})$. Enfin, utiliser $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Sujet 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x}{e^x - x}.$$

Soit $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthogonal $(O; i, j)$, avec pour unités graphiques : 2 cm sur l'axe des abscisses et 5 cm sur l'axe des ordonnées.

PARTIE A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = e^x - x - 1.$$

1. Étudier les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$. En déduire le signe de la fonction g .
2. Justifier que, pour tout réel x , $e^x - x$ est strictement positif.

PARTIE B

1. a. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
b. Interpréter graphiquement les résultats.
2. a. Calculer $f'(x)$, f' désignant la fonction dérivée de f .
b. Étudier le sens de variations de la fonction f , puis dresser son tableau de variations.
3. a. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.
b. À l'aide de la partie A, étudier la position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (T).
4. Tracer la droite (T), les asymptotes et la courbe $(\mathcal{C})$.

LA BONNE MÉTHODE

PARTIE A

1. Dériver la fonction g et étudier le signe de cette dérivée.
2. Utiliser la question précédente.

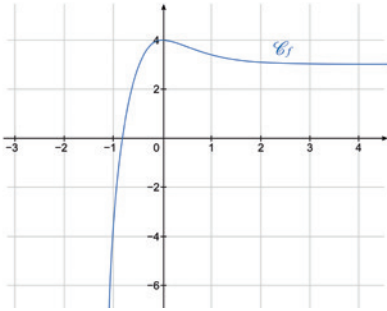
PARTIE B

1. a. Factoriser en $+\infty$ et utiliser une somme de limites en $-\infty$.
b. Trouver les asymptotes en utilisant la question 1.
2. a. Calcul simple de la fonction dérivée de f .
b. Étudier le signe de f .
3. a. Utiliser l'équation de la tangente au point d'abscisse a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
b. Étudier le signe de la différence entre $f(x)$ et l'équation de la tangente.
4. Tracer le repère. Attention aux unités.

Compléments sur la dérivation

Sujet 1

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x + 1)e^{-2x} + 3$.



1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer la dérivée de la fonction f .
3. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations.
4. On note f'' la fonction dérivée de f' . Déterminer $f''(x)$.
5. a. Faire le tableau de signe de $f''(x)$.
b. En déduire les coordonnées du point d'inflexion.
c. Donner la convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
b. Chercher les valeurs qui annulent $f''(x)$.
c. Regarder le signe de $f''(x)$.

LA BONNE MÉTHODE

1. Développer pour obtenir $f(x) = \frac{2x}{e^{2x}} + e^{-2x} + 3$ pour la limite en $+\infty$.
2. Utiliser la dérivée du produit de deux fonctions.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ en faisant un tableau de signes.
4. Même technique que la question 2.
5. a. Factoriser la dérivée seconde par e^{-2x} .
b. Chercher les valeurs qui annulent $f''(x)$.
c. Regarder le signe de $f''(x)$.

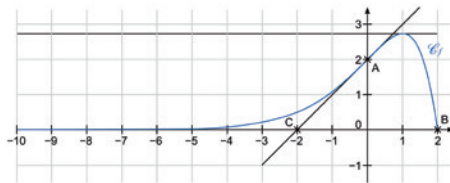
Sujet 2

PARTIE A

Dans le repère ci-dessous, on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-10; 2]$. On a placé les points A(0; 2), B(2; 0) et C(-2; 0).

On dispose des renseignements suivants :

- le point B appartient à la courbe $\mathcal{C}_f$;
- la droite (AC) est la tangente en A à la courbe $\mathcal{C}_f$;
- la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est une droite horizontale.



Répondre aux questions suivantes par lecture graphique :

1. Indiquer les valeurs de $f(0)$ et de $f(2)$.
2. Indiquer la valeur de $f'(1)$.
3. Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.

4. Indiquer les variations de la fonction f sur l'intervalle $[-10; 2]$.
5. Déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe, et celui sur lequel elle est concave.

PARTIE B

Dans cette partie, on cherche à vérifier par le calcul les résultats lus graphiquement dans la partie A.

On sait désormais que la fonction f est définie sur l'intervalle $[-10; 2]$ par : $f(x) = (2 - x)e^x$.

1. Calculer $f(0)$ et $f(2)$.
2. Déterminer f' la fonction dérivée de f . En déduire $f'(1)$.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
4. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[-10; 2]$.
5. On note f'' la fonction dérivée de f' . Déterminer $f''(x)$.
En déduire la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[-10; 2]$.

LA BONNE MÉTHODE

PARTIE A

1. Lire les ordonnées des points A et B.
2. Le nombre dérivé correspond au coefficient directeur de la tangente.
3. Pour une équation de droite $y = mx + p$, m est le coefficient directeur et p est l'ordonnée à l'origine.
4. Regarder si la fonction est croissante ou décroissante.
5. Commencer par chercher le point d'inflexion.

PARTIE B

1. Calculer les images de 0 et de 2.
2. Utiliser la dérivée du produit de deux fonctions.
3. Utiliser l'équation de la tangente au point d'abscisse a : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
4. Étudier le signe de $f'(x)$.
5. Déterminer f'' et étudier son signe.

Continuité des fonctions d'une variable réelle

Sujet 1

PARTIE A

On considère la fonction C définie sur l'intervalle $[5 ; 60]$ par :

$$C(x) = \frac{e^{0,1x} + 20}{x}$$

1. On désigne par C' la dérivée de la fonction C .
Montrer que pour tout $x \in [5 ; 60]$,

$$C'(x) = \frac{0,1xe^{0,1x} - e^{0,1x} - 20}{x^2}.$$

2. On considère la fonction f définie sur $[5 ; 60]$ par :

$$f(x) = 0,1xe^{0,1x} - e^{0,1x} - 20$$

- a. Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[5 ; 60]$.
- b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[5 ; 60]$.
- c. Donner un encadrement à l'unité de α .
- d. En déduire le tableau de signes de $f(x)$ sur $[5 ; 60]$.

3. En déduire le tableau de variations de C sur $[5 ; 60]$.

4. En utilisant la question précédente, déterminer le nombre de solutions des équations suivantes :

- a. $C(x) = 2$.

- b. $C(x) = 5$.

PARTIE B

Une entreprise fabrique chaque mois x vélos de course, avec $x \in [5 ; 60]$.

Le coût moyen de fabrication, exprimé en milliers d'euros, pour une production de x vélos de course, est donné par la fonction C définie dans la **partie A**.

Déterminer le nombre de vélos à produire pour que le coût de fabrication moyen soit minimal.

LA BONNE MÉTHODE $u_{n+1} = f(u_n)$.

PARTIE A

1. Utiliser la dérivée d'un quotient de deux fonctions.
2. a. Dériver la fonction f et étudier son signe.
- b. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.
- c. Utiliser la calculatrice.
- d. Faire le tableau de signes de $f(x)$ sur $[5 ; 60]$.

3. Remarquer que $C'(x) = \frac{f(x)}{x^2}$.

4. a. et b. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

PARTIE B

Utiliser les résultats de la **partie A**.
Penser à rédiger une conclusion.

Sujet 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty]$ par :

$$f(x) = 5 - \frac{4}{x+2}$$

On a tracé en annexe dans un repère orthonormé la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f , ainsi que la droite D d'équation $y = x$.

1. Justifier que la fonction f est continue et dérivable sur $[0 ; +\infty]$.
2. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty]$.
3. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $[0 ; +\infty]$. On note α cette solution. On donnera la valeur exacte, puis une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
4. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$. Sur la figure en annexe, en utilisant la courbe $\mathcal{C}$ et la droite D , placer les points M_0 , M_1 et M_2 , d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives u_0 , u_1 et u_2 .

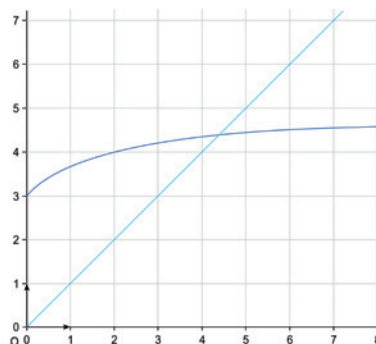
Quelles conjectures peut-on faire sur le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

5. a. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$$

- b. Démontrer que la suite (u_n) est convergente, et que sa limite est α .

Annexe



LA BONNE MÉTHODE

1. Utiliser la continuité et dérivabilité des fonctions rationnelles et de la somme de fonctions continues et dérivables.
2. Dériver la fonction f et étudier son signe.
3. Résoudre l'équation $f(x) = x$, grâce aux équations du second degré.
4. Placer les points sur le graphique et regarder ce qui se passe pour ces trois points.
5. a. Pour la récurrence, utiliser que $u_{n+1} = f(u_n)$.
- b. Utiliser les variations de la suite (u_n) pour conclure sur la convergence. Pour la limite, utiliser la propriété : si (u_n) converge vers un réel l , alors $f(l) = l$.

Fonction logarithme népérien

Sujet 1. D'après sujet Bac S, Centres Étrangers, juin 2008

I. Restitution organisée des connaissances

Prérequis : On rappelle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

1. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

2. En déduire que pour tout entier naturel n non nul, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$.

II. Étude d'une fonction f

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{\ln x}{x^2}$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $u(x) = x^3 - 1 + 2\ln x$.

a. Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

b. Calculer $u(1)$ et en déduire le signe de $u(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

2. Étude de la fonction f .

a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b. Déterminer la fonction dérivée de f et construire le tableau de variations de la fonction f .

3. Éléments graphiques.

a. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}$.

b. Déterminer la position de $\mathcal{C}$ par rapport à la droite (Δ) .

LA BONNE MÉTHODE

Partie I. 1. Privilégier la composition des limites.

Partie I. 2. Faire apparaître des limites connues sans faire apparaître une forme indéterminée.

Partie II. 1. a. On dérive la fonction et on examine le signe de ce que l'on vient d'obtenir avant toute manipulation algébrique.

Partie II. 1. b. On utilise la stricte monotonie de la fonction.

Partie II. 2. a. Lorsque l'on cherche des limites, on commence par regarder si les théorèmes généraux sur les opérations répondent. Si ce n'est pas le cas, si la forme est indéterminée, on transforme les écritures pour lever les indéterminations, en particulier en invoquant les croissances comparées des fonctions en jeu.

Partie II. 2. b. On dérive la fonction et on relit la partie II. 1.

Partie II. 3. a. En général, pour montrer que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à une courbe, on effectue la différence $f(x) - (ax + b)$ et on montre que cette différence tend vers 0.

Partie II. 3. b. On étudie le signe de l'expression $f(x) - (ax + b)$.

Sujet 2. D'après sujet Bac S, Antilles-Guyane, septembre 2007

Soit f la fonction définie sur l'intervalle

$]-2 ; 2[$ par $f(x) = \ln\left(\frac{2+x}{2-x}\right)$.

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est bien l'intervalle $]-2 ; 2[$.

2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3. Étudier les variations de f sur $]-2 ; 2[$.

4. Construire le tableau de variations de f sur l'intervalle $]-2 ; 2[$.

LA BONNE MÉTHODE

1. Il s'agit de résoudre $\frac{2+x}{2-x} > 0$.

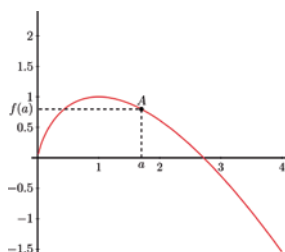
2. Le théorème à utiliser est le théorème de composition des limites.

3. On dérive f avec la formule du cours et on étudie le signe de cette dérivée sur $]-2 ; 2[$.

4. Il ne s'agit que de faire la synthèse de ce qui précède.

Sujet 3. D'après sujet Bac S, Métropole, septembre 2010

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x(1 - \ln x)$. La courbe représentative C de la fonction f est donnée :



Courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f

Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la tangente (T_a) au point A de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse a .

1. Déterminer, en fonction du nombre réel a , l'équation réduite de (T_a) .

2. Expliciter une démarche simple pour la construction de la tangente (T_a) . Construire la tangente (T_a) au point A placé sur la figure.

LA BONNE MÉTHODE

1. On utilise la formule de l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse $a > 0$.

2. Il suffit de connaître deux points distincts pour tracer la droite. On connaît le point A, il n'en manque qu'un (on peut penser à l'ordonnée à l'origine, par exemple).

Fonctions trigonométriques

Sujet 1. Étude d'une fonction

Étude de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos 2x - 2\sin x$.

1. Calculer $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.
2. Étudier la parité de la fonction f .
3. Montrer que la fonction est périodique de période 2π , mais qu'elle n'est pas périodique de période π .
4. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2\cos x(1 \in + 2\sin x)$.
5. Étudier le signe de la dérivée sur $[-\pi; \pi]$ et dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle. Tracer la courbe représentative de la fonction f sur $[-\pi; \pi]$.

LA BONNE MÉTHODE

1. C'est un simple calcul.
2. Un rapide examen de la courbe représentative de f sur une calculatrice permet de conjecturer que la fonction n'est ni paire ni impaire. Il suffit alors de montrer qu'il existe un réel a tel que $f(-a) \neq -f(a)$ et $f(-a) \neq f(a)$ pour prouver la conjecture. La première question peut donner une piste.
3. Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est périodique de période 2π lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + 2\pi) = f(x)$. Pour montrer que la fonction f n'est pas périodique de période π , on peut utiliser la première question.
4. Il suffit d'utiliser le théorème de somme et de composition.
5. On travaillera avec le cercle trigonométrique.

Sujet 2. Étude de fonction

Étude de la fonction f définie sur $I = [0; 2\pi]$ par $f(x) = e^{-x}(1 - \cos x)$.

1. Démontrer que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin x$.

2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \sqrt{2}e^{-x} \left(\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

3. Étudier le signe de $f'(x)$ et construire son tableau de variation sur $[0; 2\pi]$.

LA BONNE MÉTHODE

1. On développe la partie gauche de l'égalité à démontrer.
2. On dérive la fonction avec la formule du produit et on utilise la question précédente.
3. On observe que $x \in [0; 2\pi]$ entraîne que $x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$, et on travaille sur le cercle trigonométrique.

Primitives, équations différentielles

Sujet 1. Équations différentielles. Sujet Bac S, Amérique du Sud, novembre 2007

On souhaite résoudre l'équation différentielle (E_1) : $y' - 2y = \sin x + \cos x$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E_0) : $y' - 2y = 0$.
2. Soient a et b deux réels, et u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = a \sin x + b \cos x$. Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (E_1) .

- a. Montrer que v est une solution de l'équation (E_0) si et seulement si $u + v$ est solution de (E_1) .
- b. En déduire l'ensemble des solutions de (E_1) .
3. Déterminer la solution de l'équation (E_1) qui s'annule en 0.

LA BONNE MÉTHODE

1. C'est une question de cours.
2. a. On utilise le fait que u est solution de l'équation différentielle.
2. b. La question est classique, on raisonne par équivalence.
2. c. L'équivalence précédente relie la question 2. et la question 1.
3. On connaît la forme des solutions, on trouve la valeur de la constante en appliquant la condition de l'énoncé.

Sujet 2. Primitives. D'après sujet Bac S, Centres Étrangers, juin 2000

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^{-x} \ln(e^{2x} - 1)$. On cherche l'ensemble des primitives de f sur $]0; +\infty[$. On peut utiliser l'intégration par parties. L'énoncé propose une autre méthode qui, en fait, n'est différente qu'en apparence.

1. Démontrer que la fonction f est solution de l'équation différentielle $y' + y = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}$.

2. Démontrer que quel que soit $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{2e^x}{e^{2x} - 1} = \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{e^x}{e^x + 1}$.
3. Déduire des questions précédentes l'ensemble des primitives de la fonction f sur $]0; +\infty[$.

LA BONNE MÉTHODE

1. Il s'agit de démontrer que quel que soit $x > 0$, $f'(x) + f(x) = \frac{2e^x}{e^{2x} - 1}$.
2. Le plus simple est de montrer que l'expression de droite est égale à l'expression de gauche. On peut également effectuer la différence des deux expressions et montrer que celle-ci est nulle.
3. Toute primitive de la dérivée d'une fonction est... Par ailleurs, une primitive d'une fonction s'écrivant sous la forme $\frac{u'}{u}$ est $\ln|u|$.

Sujet 3. Équations différentielles. D'après sujet Bac S, Métropole, septembre 2007

On considère les deux équations différentielles suivantes définies sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\begin{cases} (E) : y' + (1 + \tan x) y = \cos x \\ (E_0) : y' + y = 1 \end{cases}$$

1. Donner l'ensemble des solutions de l'équation (E_0) .

2. Soient f et g deux fonctions dérivables sur et telles que $f(x) = g(x) \cos x$. Démontrer que la fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction g est solution de (E_0) .
3. Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 0$.

LA BONNE MÉTHODE

1. Il s'agit d'une question de cours.
2. Il faut procéder avec méthode et ne pas oublier que $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$.
3. On utilise la condition initiale proposée.

Calcul intégral

Sujet 1. D'après sujet Bac S, La Réunion, juin 2005

On considère les fonctions f et g définies, sur l'intervalle $[0; +\infty[$, par $f(x) = \ln(x+1)$ et $g(x) = e^x - 1$.

On désigne par C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormal.

1. Vérifier que les courbes C_f et C_g ont une tangente commune à l'origine du repère. Préciser la position de ces courbes par rapport à cette tangente.

2. Démontrer que les courbes C_f et C_g sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3. Soit a un nombre réel strictement positif. On se propose de calculer de deux façons

différentes le nombre $I(a) = \int_0^a \ln(x+1) dx$.

a. En utilisant des considérations d'aires, démontrer que

$$I(a) = a \ln(a+1) - \int_0^{\ln(a+1)} (e^x - 1) dx.$$

b. En déduire la valeur de $I(a)$.

c. Retrouver la valeur de $I(a)$ en effectuant une intégration par parties.

LA BONNE MÉTHODE

- On écrit les deux équations de tangente. On utilise le fait que les fonctions en jeu sont concave pour l'une, et convexe pour l'autre.
- On peut reprendre le cours sur le couple fonction exponentielle et fonction logarithme népérien.
- a. On utilise la réflexion d'axe Δ pour obtenir deux domaines de même aire. L'un de ces deux domaines est inscrit dans un rectangle : son aire s'exprime à l'aide de la différence de deux intégrales.

3. b. Chacune des intégrales est facile à calculer.

3. c. Il faut écrire la fonction à intégrer sur un intervalle comme le produit de deux fonctions, chacune étant dérivable et de dérivée continue sur l'intervalle. Il faut choisir habilement les deux fonctions, l'une d'entre elles doit pouvoir être dérivée facilement et on doit trouver facilement une primitive quelconque de l'autre.

Sujet 2.

Le calcul direct de la factorielle d'un entier naturel non nul n , que l'on note $n! = \prod_{k=1}^n k$, nécessite, dès que n s'élève, un nombre de multiplications extrêmement grand. L'écossais James Stirling (1692–1770) propose dans l'exemple 2 de la proposition 28 de son ouvrage *Methodus Differentialis* publié en 1730 un équivalent asymptotique de $n!$. Dans cet exercice, nous nous proposons de donner une suite majorante de $n!$.

1. On considère sur L , la courbe représentative de la fonction $\ln$, deux points distincts $A(a; \ln a)$ et $B(b; \ln b)$ où $0 < a < b$. On appelle **corde** le segment $[AB]$. Démontrer que L est située au-dessus de chacune de ses cordes.

2. Soit $k \geq 2$ un entier naturel.

a. Calculer l'aire θ_k du trapèze défini par $A_k B_k C_k D_k$ où $A_k(k; 0)$, $B_k(k; \ln k)$, $C_k(k+1; \ln(k+1))$ et $D_k(k+1; 0)$. On remarquera que $A_i = B_i$ donc θ_i est en fait l'aire d'un triangle. Calculer θ_i .

b. Soit $n \geq 1$ un entier naturel, montrer que

$$T_n = \sum_{k=1}^n \theta_k = \sum_{k=1}^n \ln k - \frac{\ln(n+1)}{2}.$$

3. a. Montrer que $x \rightarrow x \ln x - x$ est une primitive de $\ln$ sur $]0; +\infty[$.

b. Soit $n \geq 1$. Montrer que

$$\mathcal{A}_n = \int_1^n \ln x dx = \ln \left(\frac{n}{e} \right)^n + 1.$$

4. Justifier que pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a $T_{n-1} \leq \mathcal{A}_n$. En déduire que pour tout entier

$$n \geq 2, n! \leq e \sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n.$$

Le résultat subsiste-t-il pour $n = 1$?

LA BONNE MÉTHODE

1. Il faut utiliser la définition et la caractérisation des fonctions concaves deux fois dérivables.

2. a. L'aire d'un trapèze est le produit de la moyenne arithmétique de ses côtés par sa hauteur.

2. b. Pour le calcul de la somme, on écrit soigneusement ses termes : ils se regroupent pour former le résultat.

3. a. Il suffit de revenir à la définition d'une primitive.

3. b. On utilise la formule de Newton-Leibniz et les propriétés du logarithme népérien.

4. On se reporte à la première question, un dessin est le bienvenu. On termine en utilisant la croissance de la fonction exponentielle.

La divine proportion

Le nombre d'or, qui régit le rapport harmonieux entre les parties et le tout, est un exemple frappant d'idée mathématique : un concept simple, presque primitif, qui se retrouve partout autour de nous.

1,61803398875... Un livre tout entier consacré à un seul nombre ? Pourquoi celui-là plus qu'un autre ? Pourquoi porte-t-il des noms aussi prestigieux que le « nombre d'or » ou la « divine proportion » ? S'agirait-il d'un joyau ou d'une œuvre véritablement divine ? La lettre grecque ϕ (Phi) lui a même été attribuée, comme la lettre π est associée à son vieil ami et concurrent 3,1415926535. Ce nombre fascine depuis très longtemps. Il suffit de taper « *golden mean* » sur Google pour être frappé par la diversité des sites qui se l'approprient. On le voit partout, dans la philosophie, la spiritualité, l'art, l'économie et... dans les mathématiques. À vrai dire, les mathématiciens professionnels sont un peu agacés par la popularité de « leur » nombre d'or ; ce sont eux qui l'ont découvert (ou inventé ?), et voilà qu'il échappe à leur contrôle !

Beaucoup considèrent qu'on exagère son importance dans le domaine de l'esthétique et que le rôle mystique qu'on lui attribue est une imposture. Ils préfèrent se limiter à son aspect purement mathématique, et une revue tout à fait respectable – *The Fibonacci Quarterly* – est d'ailleurs presque entièrement consacrée à un thème très proche de ϕ : la suite de Fibonacci. Les mathématiques contemporaines manipulent le plus souvent des objets bien plus élaborés, et ϕ apparaît plutôt comme un souvenir d'un passé très lointain. Les mathématiciens ont cependant le sens de l'histoire de leur discipline et regardent cette « vieillerie » avec tendresse.

Henri Poincaré affirmait que « la mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes ». Le nombre d'or réunit toute une multitude de phénomènes. Le cœur de l'explication commune avait déjà été explicité par Euclide il y a plus de deux mille ans. Lorsqu'on décompose un objet en deux parties inégales, on dit que la proportion est divine, ou dorée, si le rapport entre

la grande partie et la petite est le même que le rapport entre le tout et la grande partie. La simplicité de cette définition explique l'omniprésence de ϕ . On le rencontre dans la croissance des populations de lapins, décrite par Fibonacci au Moyen Âge, dans les proportions qui régissent le pentagone régulier ou dans celles du Parthénon.

De ce point de vue, le nombre d'or apparaît comme l'un des exemples les plus frappants d'une idée mathématique : un concept simple, presque primitif, qui se retrouve partout autour de nous. C'est à ce titre que le nombre d'or a droit de cité dans le paysage mathématique. Je choisis un nombre au hasard d'une quinzaine de chiffres, comme 5 387 565 581 098 724 par exemple. Pourrait-on écrire un livre sur ce nombre ? Certainement pas ! Ce nombre ne parle que de lui-même, il n'est relié à aucune idée, il ne permet pas de comprendre « des choses différentes ».

Perception de l'espace

Je suis d'ailleurs probablement le premier (et le dernier !) dans l'histoire de l'humanité à avoir écrit ce nombre : il ne sert à rien ! Dans l'univers des nombres, certains sont plus riches que d'autres. Certains sont utiles, d'autres sont attachants, mais l'immense majorité n'a pas grand intérêt.

Le monde qui nous entoure est peuplé de rectangles de toutes sortes. Quelques-uns sont dans la nature mais la plupart sont construits par l'homme, qui doit cependant se plier aux lois naturelles. Le fil à plomb est perpendiculaire à l'horizontale et il est bien commode de construire des maisons dont les murs sont rectangulaires... Il se trouve que beaucoup de ces rectangles sont dorés : le rapport entre longueur et largeur est égal à ϕ . Pour vérifier qu'un rectangle situé devant vous est bien doré, rien n'est plus facile. Sortez votre carte de crédit (ou

votre carte Vitale, ou de bibliothèque !), et essayez de masquer le rectangle en plaçant la carte devant vos yeux. Si le rectangle est exactement masqué par la carte, il est doré ! La prédominance de ces rectangles d'or est-elle un fait acquis ou une illusion ? Ce n'est pas clair. Après tout, on voit aussi beaucoup d'autres formes de rectangles qui ne sont pas dorés, comme par exemple les feuilles au format A4 ou encore les carrés.

Dans les musées d'art, cette abondance ne fait pourtant aucun doute ; beaucoup de tableaux ont des proportions divines. Certains pensent que nous avons une préférence innée pour l'esthétique du rectangle d'or. Quant à moi, je préfère penser que les mathématiques influencent notre sens esthétique. L'artiste qui choisit ce format pour une toile ne le fait pas parce qu'il considère que ce rectangle est « beau ». De manière consciente ou inconsciente, il sait que cette proportion « contient » plus de deux mille ans de mathématiques et de réflexion sur l'harmonie et sur les liens qui unissent les nombres et notre perception de l'espace.

Avant même de commencer à peindre, le tableau a déjà du contenu ; il fait partie d'une histoire et d'une culture. En filigrane, on peut deviner la présence du passé ; Euclide, Fibonacci, Léonard de Vinci, Kepler, Escher et tant d'autres sont présents... ●

Étienne Ghys, *Le Monde*
daté du 11.04.2013

POURQUOI CET ARTICLE

Il évoque la suite célèbre de Fibonacci, pour laquelle les deux premiers termes sont 0 et 1, et chacun des termes suivants est égal à la somme des deux termes précédents.

Mathématiquement, cette suite (F_n) est définie par $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$.

On a : $F_0 = 0$; $F_1 = 1$; $F_2 = F_1 + F_0 = 1 + 0 = 1$; $F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$; $F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$; $F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$; $F_6 = F_5 + F_4 = 5 + 3 = 8$; $F_7 = F_6 + F_5 = 8 + 5 = 13$, etc.

En posant $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or) et $\phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, on démontre que

$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (\phi^n - \phi'^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ (formule de Binet).

La question démographique sert d'excuse

Face à l'urgence écologique, une question ressurgit : sommes-nous trop nombreux ? Pour le biologiste Gilles Bœuf et le démographe Hervé Le Bras, c'est un moyen commode, pour les pays du Nord, de ne pas remettre en cause leur mode de vie.

En quarante ans, la population mondiale a doublé. De 7,5 milliards d'individus en 2017, elle pourrait, selon les Nations unies (ONU), frôler les 10 milliards en 2050. Dans un manifeste publié mi-novembre, 15 000 scientifiques internationaux appellent l'humanité à freiner d'urgence la destruction de l'environnement, préconisant notamment la limitation des naissances. Faut-il revenir au malthusianisme, une doctrine prônant la restriction démographique pour réduire la misère ? Entretien croisé entre le démographe Hervé Le Bras et le biologiste Gilles Bœuf.

Le scénario de l'explosion démographique a été évoqué dès les années 1960, notamment par le biologiste américain Paul Ehrlich, auteur de *La Bombe P* (1968). Pourquoi à cette époque précisément ?

Hervé Le Bras : On a mis du temps au XX^e siècle à admettre l'idée que la population augmentait trop vite, parce que, dans l'entre-deux guerres, on avait craint le phénomène inverse : une baisse trop rapide de fécondité et un manque d'hommes. On pensait alors que les populations indiennes, chinoises ou africaines n'augmenteraient pas, et que seule la « race blanche » était appelée à se développer. Même après 1945, il a fallu attendre avant que cette vision ne change. En janvier 1960, le magazine américain *Time* titre « That Population Explosion », et l'idée commence alors à s'imposer.

Que représente, en termes de biomasse, l'occupation de la Terre par l'homme et son cortège d'animaux domestiques ?

Gilles Bœuf : Selon un article publié dans *Science* il y a quelques années, il y a 12 000 ans (quand l'humain invente l'agriculture), on comptait environ 5 millions

d'individus sur Terre. Si l'on fait la somme de ces humains et de leurs animaux domestiques, cela représente à peu près 0,1 % de l'ensemble de la biomasse que constituent les 5 000 espèces de mammifères. Aujourd'hui, c'est 90 % ! Et la biomasse que représente le milliard et demi de vaches que nous élevons, sachant qu'une vache pèse bien plus que cinq humains, excède la biomasse des 7,5 milliards d'humains vivant sur la planète...

L'appel qu'ont lancé 15 000 scientifiques sur les dangers liés à l'état de la planète insiste sur l'urgence qu'il y a à « limiter adéquatement la croissance de la population » humaine. Qu'en pensez-vous ?

H.L.B. : Selon moi, ce raisonnement est trop général. Les situations démographiques dans le monde sont très différentes. Les Iraniens en sont à 1,7 enfant par femme. Rien à voir avec le Niger, actuellement le pays ayant la plus forte fécondité avec 7,5 enfants par femme. Par ailleurs, entretenir l'angoisse d'une démographie galopante, c'est une manière commode pour les pays du Nord de ne pas remettre en cause leur propre mode de vie et de consommation. En incriminant les pays du Sud qui font plus d'enfants, les pays riches leur disent en réalité : vous n'avez pas le droit de polluer ni de consommer autant que nous l'avons fait.

G.B. : Autre question : dans les pays où la pression démographique est trop forte, comment appliquer une politique de contrôle des naissances ? Si l'on excepte la contrainte d'Etat – comme l'a fait la Chine en 1979 avec sa « politique de l'enfant unique » –, la réponse passe par l'éducation des jeunes filles. Ce qui demande une volonté politique, des moyens et du

temps. De fait, le gouvernement du Niger est actuellement incapable de faire face, et il faudrait une aide internationale importante pour espérer que les choses bougent dans ce domaine.

H.L.B. : La solution passe en effet par les femmes et tient en deux mots : éducation et autonomie. Pas l'éducation primaire, mais secondaire : il faut que les filles continuent d'aller à l'école une fois qu'elles sont nubiles. Elles y apprennent les bases du planning familial, et surtout cela les protège d'un mariage précoce. L'autonomie, cela signifie que c'est à elles et non aux hommes de décider de leur fécondité. Dans les pays très pauvres du Sahel, un enfant de plus, c'est un travailleur de plus. Les hommes continuent donc de vouloir beaucoup d'enfants. Mais les quelques enquêtes menées avec les femmes montrent qu'elles sont plus réalistes – ne serait-ce que parce qu'elles veulent, comme dans le reste du monde, accéder à l'emploi et à la vie publique.

Malthus fondait sa théorie, non sur la crise écologique mais sur l'adéquation entre la croissance de la production agricole et celle de la démographie. Pourra-t-on nourrir 10 milliards d'individus ?

G.B. : En termes de production globale, oui. Mais on se heurte à un gigantesque problème, celui de la distribution et du gaspillage alimentaire. A l'échelle mondiale, on jette presque la moitié de ce qu'on produit ! Pour améliorer la répartition de la nourriture, il faudrait mettre en place toute une organisation, en commençant par respecter les coûts de production agricole afin que les paysans puissent s'en sortir. C'est une tâche énorme, mais c'est possible.

H.L.B. : Il y a un problème plus grave : celui de l'augmentation fulgurante de la consommation mondiale de viande. Cette demande accrue en protéines animales est apparue à la fin des années 1980, lorsque les classes moyennes des pays émergents ont gagné en pouvoir d'achat. En Chine, la consommation de viande a été multipliée par vingt en quarante ans ! On produit actuellement deux fois plus de calories végétales qu'on en consomme, car ces calories végétales nourrissent les animaux qui nous apportent des calories animales. La moitié de la production actuelle de céréales est destinée à des animaux domestiques. Or, pour récupérer une calorie de viande ou de lait, il faut donner quatre calories végétales à un poulet, dix à une vache...

Mais pourra-t-on produire demain autant de nourriture qu'aujourd'hui, alors que les océans s'acidifient, que les pollutions dégradent les écosystèmes, que le changement climatique est en route ?

G.B. : Je le crois, à condition de changer sacrément nos habitudes. Et d'appliquer quelques principes simples. Ne pas gaspiller l'eau. Arrêter d'utiliser des pesticides dangereux, diminuer les engrais. Développer l'emploi ailleurs que dans les villes, en misant sur la polyculture raisonnée. Et cesser d'augmenter indéfiniment les surfaces agricoles ! Si nous créons demain un gigantesque agrosystème sans

zone humide ni forêt tropicale, avec des océans mis en coupe réglée, on court à la catastrophe. Il faut aussi veiller à préserver de la biodiversité, pas seulement au sein des plantes cultivées.

Comment le changement climatique va-t-il affecter la croissance démographique ?

H.L.B. : Cette croissance sera très différente selon les régions. Sur le continent américain, par exemple, la fécondité a diminué presque partout, au Nord comme au Sud – la région en tête étant... la Guyane française, avec 3,4 enfants par femme. En Afrique, c'est autre chose : selon la projection moyenne de l'ONU, c'est entre les deux tropiques africains que se produiront les trois quarts de la croissance mondiale en 2050. Avec deux types de situations. Au Sud, le terrain est encore presque vide : la densité est de 10 habitants par kilomètre carré au Gabon, de 35 dans l'immense République démocratique du Congo (RDC).

Il suffirait donc d'y augmenter les rendements agricoles pour nourrir bien plus d'habitants. Mais au Nord, c'est le Sahel. Et là, le problème est immense. Du Sénégal jusqu'au Niger (sans compter le Tchad), il y a environ 65 millions d'habitants : au taux de fécondité actuel, ils seront 200 millions en 2050, 400 millions en 2100. Pour eux, la question de l'alimentation et de l'emploi va se poser très fortement.

G.B. : D'autant que le changement climatique touchera de plein fouet cette région intertropicale. On y est déjà : l'assèchement du lac Tchad, principale source d'eau potable en Centrafrique, est une catastrophe sociale monstrueuse pour les quatre pays qui en dépendent – Niger, Tchad, Cameroun et Nigeria. La seule solution pour enrayer cette évolution, c'est d'arrêter la déforestation. L'association de la sécheresse et de la disparition des forêts est la première cause des problèmes dans plusieurs régions du monde. Or la forêt garantit la pluie (par évapotranspiration des arbres), sans laquelle il ne peut par ailleurs pas y avoir d'agriculture. Faute de quoi les habitants de ces régions migrent vers les villes – où ils ne trouvent pas de travail.

La question de la pression démographique ne se poserait donc que dans quelques régions du monde ?

H.L.B. : Oui. Avec un autre phénomène qui complique encore les choses : la guerre. Quels sont les pays d'Asie qui ont la plus forte fécondité ? L'Afghanistan (5,3 enfants par femme), suivi de l'Irak (4,6), du Yémen (4,4), de la Palestine (4,3) et du Pakistan (3,7). En Afrique, c'est d'abord le Niger, puis la Somalie, le Mali, la RDC, le Tchad... Or, tous ces pays connaissent une grande instabilité politique, voire des conflits. Comment implanter une politique de régulation des naissances dans un pays en guerre ?

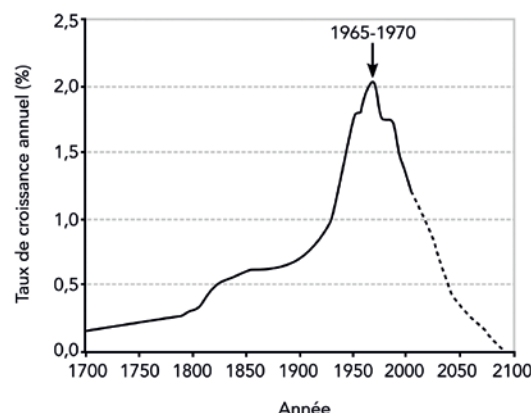
POURQUOI CET ARTICLE

Si l'on considère une fonction D qui à une année associe l'espérance de vie d'un individu, alors on constate effectivement que cette fonction D est croissante sur l'intervalle $[0, 2018]$. On peut également affirmer que :

$\lim_{(n \rightarrow +\infty)} D(n) = A$, avec A un réel positif.

En effet, les humains ne sont pour le moment pas immortels. Étant donné que $D(2018) > 70$, on pourrait penser que $A > 70$, mais rien ne l'assure. Nul ne peut prédire les variations de la fonction D sur $[2018, +\infty[$. Ainsi, on est en droit de penser que la courbe représentative de D va admettre un point d'inflexion ou un sommet d'abscisse supérieure à 2018 en plus d'une asymptote horizontale d'équation $y = A$.

Si l'on considère une fonction T qui à une année associe le taux de croissance de la population mondiale, alors, en supposant que T est dérivable sur $[1700, 2018]$, on constate que $T'(1969) = 0$ et que T' est positive sur $[1968, 1969]$ et négative sur $[1969, 1970]$. Cela prouve bien que la fonction T admet un maximum local $T(1969) = 2,116$, atteint lorsque $a = 1969$. En prouvant que pour tout a de $[1700, 2018]$ on a bien $T(a) = 2,116$, on prouve que ce maximum est global.



Il y a là un cercle vicieux, car une croissance démographique trop rapide est un facteur de déstabilisation propice aux conflits. C'est un phénomène relativement nouveau : géographiquement, les zones de conflit coïncident de plus en plus avec celles où la démographie est la plus forte, et les deux facteurs font système. On entre dans un problème plus préoccupant et plus large encore, qui est la gestion politique de la planète.

G.B. : S'y ajoute la question du changement climatique. Il y a d'étroites relations entre l'écologie et la géopolitique d'une région. La guerre de Syrie intervient en 2011, après les douze pires années de sécheresse du Croissant fertile depuis trois siècles : ce n'est pas une coïncidence.

Quelle que soit l'efficacité des politiques démographiques à venir, il faut compter avec l'inertie des générations : nous serons plus nombreux en 2050 qu'aujourd'hui. Comment concilier cette contrainte avec l'urgence écologique ?

G.B. : Il y a là un paradoxe. Mais l'inertie, malheureusement, est aussi très forte en écologie ! Le premier texte faisant date sur le sujet remonte à 1895 : des Américains s'alarment de la disparition des grandes forêts de conifères, qu'ils coupaient pour faire de la pâte à papier, et de la contamination des rivières à saumon. Plusieurs alertes sont ensuite lancées dans les années 1950-1960. Mais le premier article d'écologie dans une grande revue scientifique, *Science*, date de 1997 ! En revanche, l'accélération de ces publications est maintenant continue. Et chaque article est plus inquiétant que le précédent.

En termes de population, on parle beaucoup de ce qui « entre », moins de ce qui « sort »... La mortalité sera-t-elle affectée par les bouleversements environnementaux ?

G.B. : C'est une question très profonde. Les résultats d'un article récent sont très parlants : en prenant comme critères la durée de vie, la taille et les performances

physiques de l'homme, on voit que tout est « au taquet ». Après avoir pris 15 cm en cent cinquante ans, nous ne grandissons plus. Pareil pour la durée de vie : on a gagné 35 ans sur cent cinquante ans, mais la courbe est pratiquement à l'asymptote – et la différence homme-femme s'amoindrit. Avons-nous atteint les capacités de développement et d'augmentation des performances propres à notre espèce ? Ou les freins qu'on se crée en dégradant l'environnement nous empêchent-ils de faire croître ces paramètres ?

H.L.B. : A l'échelle mondiale, il y a eu à partir des années 1970 une extraordinaire baisse de la mortalité après 60 ans – ce qui participe à la croissance de la population. Les champions du monde sont les Japonais. La France est légèrement derrière le Japon. Quant aux Etats-Unis, ils sont très au-dessous, et l'espérance de vie y plafonne depuis une dizaine d'années. Ce n'est pas la limite biologique qui est en jeu chez les Américains, mais le mode de vie, en particulier l'obésité.

Revenons au contrôle des naissances. Pour que celui-ci soit efficace, il faut que les changements soient consentis et les filles éduquées. Mais il y a des pays où le poids de la tradition, musulmane notamment, s'y oppose fermement...

H.L.B. : La religion musulmane n'est pas seule en cause. En Haïti, où la fécondité est une des plus fortes d'Amérique du Sud, c'est la religion catholique qui est aux manettes. Mais les Eglises, quelles qu'elles soient, ne freinent pas toujours. Ainsi, au Mexique, la baisse de fécondité fut négociée en 1972 entre l'Eglise et le président Echeverría et le taux de fécondité est passé de 6,5 enfants par femme à 2,3.

En Iran, pays à strict régime musulman, la pression démographique a fortement diminué ces dernières décennies. Même chose dans les pays du Maghreb. En Algérie, l'âge moyen du mariage est passé de 17 ans à 28 ans en une seule génération, notamment parce que les femmes se sont massivement dirigées vers les études. En Tunisie, on compte, à la sortie

de l'université, 40 % de plus de femmes que d'hommes.

Il est vrai toutefois que, dans certaines situations locales, des groupes religieux luttent contre le contrôle des naissances. Notamment dans les pays musulmans où les conflits sont les plus violents et où une partie des groupes en présence cherchent à empêcher l'éducation des filles. Le nom du mouvement terroriste Boko Haram vient des mots *book* et *haram* et signifie « livres interdits ».

A vous entendre, le problème démographique n'est pas celui dont nous souffrons le plus. Le malthusianisme ne s'impose donc pas ?

H.L.B. : Il s'impose d'autant moins qu'une grande partie du chemin est déjà fait. Les projections en nombre absolu sont une chose, mais il faut aussi prendre en compte le taux de croissance de la population mondiale. Celui-ci a augmenté dans les années 1950, puis a atteint son maximum au début des années 1970. Aujourd'hui, il a déjà pratiquement diminué de moitié par rapport à ce maximum. Et les éléments sont réunis pour que ce ralentissement global continue, sauf dans quelques *hot spots* problématiques.

G.B. : La question démographique doit être posée, mais la population sert d'excuse ou de masque à d'autres problèmes. On brandit la menace de 10 milliards d'humains, mais ce qui importe pour un avenir meilleur, c'est de savoir qui émet le plus de pollution, de contrôler ce phénomène, et de parvenir à une meilleure distribution des ressources. ●

Gilles Bœuf, biologiste, professeur à l'université Pierre-et-Marie-Curie, ex-président du Muséum national d'histoire naturelle.

Hervé Le Bras, démographe, directeur d'études à l'EHESS et directeur de recherche émérite à l'INED.

Propos recueillis par Catherine Vincent et Stéphane Foucart,

Le Monde daté du 09.12.2017

La musique sous la baguette d'un compositeur artificiel

Des chercheurs suisses ont développé une intelligence artificielle capable de créer de toutes pièces des mélodies dans un style donné.

Parmi les chanteurs en kilts, les danseurs de claquettes ou les joueurs de cornemuse, un musicien d'un genre nouveau fera-t-il bientôt son apparition dans les festivals celtiques ? Son allure est plus austère, un peu moins folklorique. Et pour cause, il s'agit d'un ordinateur, ou plus précisément d'un réseau de neurones artificiels. Il est capable de générer de toutes pièces des partitions de musique traditionnelle irlandaise. Bien loin des contrées celtiques, ce sont des Suisses, Wulfram Gerstner et Florian Colombo, chercheurs au laboratoire de Neurosciences Computationnelles de l'École polytechnique fédérale de Lausanne, qui sont les géniteurs de cet algorithme baptisé DAC, pour « Deep Artificial Composer ».

Ce programme est bien différent des logiciels traditionnels. Il mime en effet le fonctionnement d'un réseau biologique de neurones. Son architecture, comparable à celle d'un cerveau animal, est composée de fonctions mathématiques qui se substituent aux cellules vivantes. Elles sont superposées en couches successives et forment ainsi un entrelacs dont chaque niveau effectue sa propre part du travail d'analyse.

« L'architecture de ce réseau est très modulaire. Elle permet d'optimiser les performances du modèle », explique Florian Colombo. Chaque strate transmet le résultat de ses calculs à celle qui lui succède et le processus se répète ainsi niveau après niveau. La précision du traitement s'affine donc à mesure que le signal s'insinue dans les arcanes du réseau.

Capable d'apprendre et de progresser

Contrairement à d'autres technologies plus classiques, le Deep Artificial Composer

est, quant à lui, capable de générer une partition sans même maîtriser la moindre notion de théorie musicale. Nul besoin de lui inculquer des règles de composition. Il analyse les créations de véritables mélodistes et apprend de lui-même à produire de la musique dans un genre donné.

Pour l'heure, les chercheurs l'ont nourri des airs traditionnels irlandais, mais aussi klezmers, un folklore d'Europe de l'Est, dont les données numériques sont déjà abondantes, au format MIDI. Ce standard informatique permet d'enregistrer des séquences de notes ainsi que leurs caractéristiques : hauteur, longueur et vitesse. N'importe quel instrument virtuel peut ensuite produire des sons à partir de ces partitions numériques. « Nous avons récupéré des collections de plusieurs milliers de fichiers, disponibles sur Internet. Nous avons choisi deux styles de musique différents afin de vérifier si un tel algorithme peut apprendre à les distinguer », indique Florian Colombo.

Le DAC parcourt les partitions de ces différents styles et étudie comment chaque note succède à celle qui la précède. Il analyse leur hauteur et leur durée. Après cette première phase d'apprentissage, le programme s'entraîne. Il tente de deviner les caractéristiques des notes qui se succèdent dans les morceaux intégrés à sa base de données. Il applique pour cela les règles de probabilité mathématiques acquises au cours de son travail d'analyse.

Lorsque ses prédictions se montrent fiables à 50 % pour la hauteur des notes et 80 % pour leur longueur, le programme s'avère fin prêt à générer ses propres ritournelles, dignes d'un compositeur humain. La mélodie prend vie alors que les notes s'ajoutent les unes à la suite des autres selon les lois probabilistes établies

par le DAC lui-même. Il parvient finalement à déterminer à quel style musical correspond sa création.

Possible autocritique

L'algorithme est même disposé à l'autocritique. Il compare ses partitions avec celles des artistes de chair et d'os et en déduit si son travail est convaincant. « Tout l'enjeu des expériences de composition artificielle est d'assurer la crédibilité et le réalisme de la mélodie », commente Gérard Assayag, directeur de recherche à l'IRCAM, l'Institut de recherche et de coordination acoustique-musique, et responsable de l'équipe Représentations musicales. Les travaux de cette unité s'articulent notamment autour des domaines de la composition assistée par ordinateur et de la musicologie computationnelle.

Les chercheurs suisses ont présenté les premiers résultats de leurs travaux en avril à Amsterdam, au cours de la conférence Evostar 2017. Plus grand rendez-vous européen de l'informatique bio-inspirée, l'événement a été l'occasion de découvrir plusieurs airs issus du travail du DAC.

Un des premiers morceaux créés par le réseau artificiel de neurones, avant toute phase d'apprentissage, est jugé par les scientifiques eux-mêmes comme « peu convaincant ». Mais au fil de son entraînement, le générateur donne naissance à des mélodies de plus en plus abouties. Florian Colombo en personne a d'ailleurs interprété l'une d'elle au violoncelle. Scientifique certes, mais aussi artiste : « J'étudie la musique et je pratique le violoncelle depuis mes 7 ans », glisse le chercheur suisse. Il est même cocréateur de l'orchestre de chambre des étudiants de l'EPFL, fondé en 2013.

Alors que les compositions du Deep Artificial Composer se cantonnent aujourd'hui à des mélodies à une seule voix, les capacités de l'algorithme promettent encore d'évoluer. « *Nous développons un modèle capable de traiter des partitions polyphoniques* », annonce Florian Colombo. « *Le prototype est déjà fonctionnel et les premiers résultats sur des compositions de Bach notamment sont intéressants. Les partitions peuvent par exemple être jouées au piano, mais un travail supplémentaire est encore nécessaire pour les adapter à un orchestre* », tempère néanmoins le chercheur. A New York, en septembre prochain, la première édition de la Cognitive Computational Neuroscience Conference sera l'occasion de découvrir ces premières avancées.

L'architecture du Deep Artificial Composer s'appuie sur une forme spécifique d'intelligence artificielle : le réseau de neurones artificiels « longue mémoire à court terme ». Née il y a près de deux décennies à Lugano, dans le canton suisse du Tessin, cette technologie bien particulière confère au DAC toutes ses capacités de calcul. Les plus grandes firmes informatiques telles qu'Apple, Google ou Microsoft en tirent d'ailleurs déjà bénéfice dans le domaine de la reconnaissance de langage.

Puissance informatique inédite

Mais la puissance de traitement ne serait rien sans les avancées matérielles qui accompagnent le développement de cette forme nouvelle de programmation. Pour effectuer leurs calculs, les logiciels traditionnels utilisent en effet classiquement le processeur central de l'ordinateur. Les réseaux de neurones artificiels exploitent,

quant à eux, la carte graphique pour révéler tout leur potentiel. Principale différence entre ces deux composants électroniques : le nombre de cœurs de calculs, et la façon dont chacun traite l'information.

Les quelques dizaines de cœurs du processeur permettent certes de passer aisément d'un type de tâche à un autre, mais s'avèrent beaucoup moins performantes quand il s'agit d'effectuer un même type d'opération en simultané. À l'inverse, les centaines de cœurs des cartes graphiques se montrent beaucoup plus à l'aise pour traiter parallèlement une même opération de manière répétitive. La polyvalence face à la régularité. Les ordinateurs à réseau de neurones artificiels disposent ainsi d'une vitesse de calcul dix fois plus grande que celle de leurs homologues classiques.

Le DAC tire donc partie de cette puissance informatique inédite et la met au service de la création musicale. Au service et non en concurrence. Les deux scientifiques suisses à l'origine de l'algorithme ne prétendent en effet pas directement rivaliser avec les mélodistes humains. L'équipe entrevoit plutôt des perspectives d'aide à la composition. Un point de vue d'ailleurs partagé par Gérard Assayag de l'IRCAM : « *Je crois plutôt à la co-créativité homme-machine qu'à la pure générativité des machines. L'ordinateur stimule le musicien, les musiciens nourrissent la machine et lui permettent d'apprendre.* »

Outre le domaine spécifique de la composition musicale, les avancées issues du développement du DAC ouvrent la voie à un champ de recherche bien plus large encore. Elles promettent notamment de percer certains des mystères qui planent

encore sur le fonctionnement du cerveau. L'occasion, peut-être, de découvrir comment cet organe si complexe peut contribuer à faire naître toute la ferveur et l'émotion qui animent les peuples celtes dès lors que résonne un air de cornemuse. Peu importe qu'il soit l'œuvre d'un Homme ou celle d'une machine... ●

Benoît Crépin, *Le Monde*
daté du 12.07.2017

POURQUOI CET ARTICLE

Le DAC (*Deep Artificial Composer*) a été créé pour aider à la composition de musiques dans tous les styles possibles. Il a été conçu pour procéder sous forme d'algorithmes qui se suivent et se transfèrent les informations. En effet, il commence par intégrer les musiques, puis s'entraîne pour obtenir de nouvelles informations à partir de ses erreurs, et enfin il produit la musique avec un nouvel algorithme qui utilise toutes les données qu'il a collectées. Pour réussir à faire le lien entre tous ces algorithmes, il a donc fallu le concevoir avec des fonctions intégrées qui soient toutes continues. En effet, si une fonction était discontinue à un moment de l'algorithme, cela provoquerait automatiquement une erreur ou la fin de la boucle. On voit donc dans ce contexte que les fonctions, et notamment les fonctions continues, sont mises au service des algorithmes à différentes étapes du processus, en simultané ou à la suite les unes des autres, pour obtenir à la fin une musique harmonieuse tirant profit de toutes les connaissances accumulées.

Les barreaux irréguliers de l'échelle de Richter

Un géophysicien nous le disait ici-même, le séisme survenu en Haïti en janvier et celui qui a frappé le Chili « *sont sans commune mesure* ».

POURQUOI CET ARTICLE

On dit que $\log_b$ est la fonction logarithme de base b ($b > 0$) si et seulement si : $\log_b(x) = y$ est équivalent à $x = b^y$.

Le cas particulier étudié en terminale S est celui de $b = e$, c'est-à-dire le cas où la base du logarithme est la constante e . On l'appelle alors logarithme népérien. En effet, la fonction dérivée est connue et possède une expression simple.

Le cas particulier où $b = 10$ est utilisé régulièrement dans des applications concrètes (pH, son...). On l'appelle alors logarithme décimal. La fonction dérivée est connue mais l'expression est un peu plus longue.

Pourtant l'utilisation d'échelle logarithmique est fort utile pour représenter sur un même axe des valeurs fortement éloignées. Ainsi les magnitudes sur l'échelle de Richter vont de 0 à 10. Un séisme dont la magnitude est supérieure à 9 est très rare (un à cinq par siècle).

Sans commune mesure dans le bilan, bien sûr. Mais aussi dans leur ampleur. Leurs magnitudes paraissent relativement proches – respectivement 7 et 8,8 sur l'échelle de Richter –, mais cette apparente proximité masque une grosse différence entre les événements.

Des séismes, il s'en produit tous les jours dans tous les coins du globe. Des gros, des petits, des indétectables et des majeurs. Un séisme comparable à celui du Chili n'arrive en moyenne qu'une fois par an.

Pour classer des phénomènes qui peuvent libérer des quantités d'énergie ridicules ou colossales, il est malaisé d'utiliser une échelle linéaire qui partirait dans les valeurs très grandes et/ou très faibles. On utilise donc une échelle appropriée dite logarithmique. C'est la fameuse échelle de Richter, une échelle dont les barreaux successifs ne sont pas espacés régulièrement...

Comment est calculée la magnitude d'un séisme ? L'énergie libérée par le mouvement des plaques tectoniques est mesurée par des sismographes qui enregistrent les ondes sismiques¹. C'est à partir de cette mesure que l'on détermine la magnitude d'un séisme sur l'échelle de Richter. Cette dernière est égale au logarithme – base dix – de l'amplitude maximale d'une onde sismique (mesuré à 100 kilomètres du foyer de la catastrophe) moins une constante de référence.

Soit :

$$M = \log(A_{\max}) + c$$

Un rapide calcul permet ainsi de calculer l'ordre de grandeur qui sépare deux séismes. (Pour ceux qui se rappellent de leurs cours de terminale, rappelons que si $\log(x) = y$ alors $x = 10^y$, pour $x > 0$).

Le rapport des amplitudes maximales des séismes de magnitude 7 et 8,8 vaut $10^{(8,8-7)}$. Soit environ 63. L'amplitude des ondes sismiques est donc 63 fois plus importante au Chili qu'en Haïti. Bien plus que ne le laissent présager les données brutes de magnitude.

Bien que reposant sur des faits scientifiques, l'échelle de Richter ne rend pas compte d'un grand nombre de facteurs humains ou environnementaux qui font qu'un séisme est plus ou moins dévastateur. C'est bien ce qu'on peut lui reprocher en ce début d'année.

D'autres échelles existent pour estimer la force d'un séisme. Pour n'en citer qu'une, l'échelle de Mercalli est basée sur l'étendue des dégâts, de la petite fissure au chaos total. Elle ne repose sur aucune mesure scientifique et est parfaitement subjective. C'est pour ça que l'on préfère utiliser l'échelle de Richter, même imparfaite. ●

Jonathan Parienté, blog *Le Monde*
« En quête de science » daté du 04.03.2010

Un ordinateur dans votre poche

Est-ce sous la forme de l'ordinateur individuel que l'informatique entrera dans la vie de tous les jours ? On connaît l'essor des « calculatrices » de poche, équivalent sous forme réduite des calculatrices de bureau, effectuant les quatre opérations arithmétiques fondamentales : addition, soustraction, multiplication et division. Dans leur sillage, certains constructeurs d'ordinateurs classiques proposent maintenant des « calculateurs » de poche. Ils traitent des fonctions plus complexes : inverses, logarithmes, lignes trigonométriques, intérêts composés, taux d'amortissement. Si l'on ose ainsi passer du sexe faible au sexe fort, on ne prononce encore que timidement le mot d'« ordinateur » de poche.

Et pourtant, on retrouve bien là, sous une forme simple, les principes et la structure des ordinateurs, à un prix dérisoire. Mais l'est-il vraiment pour le service rendu ?

Le calculateur de poche, comme le livre du même nom, suppose en fait une grande poche. Il pèse dans les 200 grammes et mesure environ 8 centimètres sur 15, pour 2 bons centimètres d'épaisseur.

Que fait-il ? Sinus, cosinus, puissances, bref une dizaine de fonctions complexes s'ajoutant aux fonctions arithmétiques classiques. C'est en somme, le concurrent de la règle à calcul. Mais quel concurrent ! Mesurés sur quelques problèmes typiques, les temps nécessaires à la résolution complète tombent de quelques minutes à quelques dizaines de secondes, un gain moyen dans un rapport cinq à dix. La précision obtenue est de l'ordre de dix chiffres significatifs contre trois, quatre au maximum, pour la règle à calcul.

Sa structure s'apparente bien à celle d'un ordinateur. Les données d'entrée sont traitées par un programme, c'est-à-dire des instructions qui s'enchaînent. Celles-ci sont décodées par un organe de commande. Elles sont exécutées par un organe de calcul. Les résultats sont enfin visualisés de façon claire.

À y regarder de près, ces éléments sont bien sûr assez rustiques, et c'est la notion de « programme » qui peut le plus être controversée. Dans un ordinateur d'architecture moderne, on trouve des « instructions » enregistrées en mémoire à deux niveaux. À un premier niveau se

trouve le programme proprement dit. C'est un enchaînement d'instructions dont l'ordre est choisi par l'utilisateur pour résoudre un problème déterminé. Elles sont inscrites en mémoire au moment de traiter ce problème, ou un peu avant, et sont ensuite effacées au moment de l'inscription du programme suivant. Chacune de ces instructions fait appel, lors de son décodage, à une séquence d'instructions plus élémentaires, dont l'ordre a été fixé par le constructeur. Celles-ci sont enregistrées à un second niveau de mémoire, de façon généralement indélébile. C'est la technique de la microprogrammation.

Dans l'ordinateur de poche, c'est seulement le second niveau que l'on retrouve. Le programme proprement dit n'est pas enregistré à un premier niveau avant son exécution. Les instructions sont exécutées au fur et à mesure de leur composition. La programmation est en quelque sorte extérieure à l'ordinateur (Chaque instruction est plus complexe que celle d'un ordinateur habituel. C'est une véritable fonction qui correspond mieux – ô sublime clarté du vocabulaire informatique – aux notions de « sous-programme » ou de « macro-instruction »).

De même, la notion de mémoire de données n'existe pratiquement pas. Les données sont entrées au fur et à mesure du calcul. Il suffit de pouvoir enregistrer temporairement des résultats intermédiaires,

dans les registres de l'organe de calcul pour avoir déjà une souplesse d'utilisation fort appréciable.

Comment ces éléments entrent-ils dans un aussi petit volume ? C'est, bien sûr, grâce aux circuits intégrés. Il faut constater d'abord que l'alimentation du calculateur – des batteries rechargeables – occupe pratiquement le tiers du volume. Le clavier nécessaire à l'entrée des données, aussi plat que possible, offre sur la surface disponible trente à quarante touches (les dix chiffres usuels et des « touches de fonction », telles qu'addition ou soustraction, correspondant aux différents types d'opérations du calculateur). La visualisation des résultats se limite à une rangée de chiffres lumineux, comparable à ceux des appareils de mesure électronique.

Le reste, c'est en quelque sorte l'« unité centrale » avec ses trois parties essentielles : l'organe de commande, l'organe

POURQUOI CET ARTICLE

Cet article mentionne **les premières calculatrices**, qui permettent de faire rapidement des calculs, dont on ne connaissait auparavant le résultat qu'en consultant des tables : tables des logarithmes, des cosinus, des sinus, etc. L'invention des calculatrices a ainsi profondément modifié l'enseignement des mathématiques...

de calcul et la mémoire (cette dernière est donc, ici, uniquement une mémoire inaltérable contenant les micro-instructions). Une carte de circuits intégrés à grande échelle suffit pour chacune de ces trois parties. La simplicité de structure est accentuée par le choix d'une organisation dite « en série ». Qu'est-ce à dire ? Soit, par exemple, à effectuer l'addition de deux nombres : 123 et 254. Dans un ordinateur classique, un « additionneur » ajoute les unités 3 et 4, un autre additionneur les dizaines 2 et 5, un troisième les centaines 1 et 2. Ces trois additions se déroulent « en parallèle » dans le même intervalle de temps (légèrement majoré en réalité pour tenir compte d'éventuelles retenues). Dans un ordinateur simplifié, organisé « en série », un seul et même additionneur ajoute d'abord les unités 4 et 3, puis est utilisé à nouveau pour faire la somme des dizaines, des centaines, etc.

Il en résulte que le temps d'addition total est proportionnel aux nombres manipulés. La conséquence est que, malgré l'emploi de

circuits intégrés comparables à ceux des ordinateurs puissants, les temps de calcul pratiques sont de l'ordre du dixième de seconde pour chaque opération élémentaire. Mais c'est bien largement suffisant pour donner l'impression d'instantanéité, qui est le caractère le plus frappant de ces calculateurs de poche.

Et il est de fait que ces appareils apportent, à qui les manipule pour la première fois, un véritable sentiment d'enthousiasme, qui est sans doute pour beaucoup dans leur succès commercial.

Est-ce à dire que la règle à calcul est définitivement détrônée ? Le prix d'un ordinateur de poche est aujourd'hui de l'ordre de 1 000 à 3 000 F. Celui d'une bonne règle à calcul de 50 à 100 F. Quels que soient les progrès, toujours spectaculaires, des prix de l'électronique, il est douteux que l'écart puisse diminuer dans des proportions aussi considérables.

S'il hésite peu actuellement à faire acquérir à son patron un calculateur de poche à des fins professionnelles, le

particulier balancera certainement lorsqu'il lui faudra l'acheter sur ses fonds personnels. Quels sont les arguments ? Vitesse et précision. Mais est-on vraiment à quelques minutes près ? A-t-on besoin souvent de dix chiffres significatifs ? Alors, on fait appel à d'autres arguments de vente qui sont de nature plus sentimentale. Il est symptomatique de lire, textuellement, dans une notice de présentation et sous la plume du constructeur, qu'il s'agit là d'un instrument incomparable « pour connaître le nombre de jours qu'il vous reste pour acheter un cadeau avant l'anniversaire de votre femme ». Gageons que celle-ci accepterait volontiers une erreur de quelques jours si l'argent destiné à l'achat de l'ordinateur de poche s'ajoutait au cadeau, ou aboutissait en fin de compte... dans sa propre poche. ●

Jean-Marc Chabanas, *Le Monde*
daté du 15.09.1973

Le « terroriste » dans l'avion était un économiste avec une équation différentielle

« Des notes sibyllines, peut-être un code, possiblement les détails d'un complot destiné à faire exploser le vol American Airlines 3950 et ses dizaines de passagers » : en voyant des signes étranges manipulés par son voisin dans l'avion, une femme a fait immobiliser, avant le décollage, l'appareil qui devait relier Philadelphie à Syracuse, dans le nord-est des États-Unis.

Elle a prétexté être « trop malade pour voyager » et a fait part de ses suspicions à l'équipage. L'homme d'une quarantaine d'années a été escorté hors de l'appareil et a été informé qu'il était soupçonné de terrorisme. Il a alors éclaté de rire, relate *The Washington Post* : les codes énigmatiques étaient en réalité des mathématiques, plus précisément

une équation différentielle. Qui, il est vrai, paraît totalement absconse aux néophytes.

Guido Menzio, le passager suspect, est professeur d'économie à l'université de Pennsylvanie et à celle de Princeton. L'Italien a assuré avoir été « traité avec respect », mais s'est étonné de procédures « trop rigides, dans le sens où tout est arrêté dès que la moindre alerte est donnée sans aucune vérification, et qui s'appuient sur les contributions de personnes pouvant fantasmer sans raison ». « Comment éviter une épidémie de paranoïa ? Il est difficile de ne pas reconnaître dans cet incident les émotions qui guident l'électorat de [Donald] Trump... », glisse-t-il. ●

Le Monde daté du 08.05.2016

POURQUOI CET ARTICLE

Les équations différentielles sont une branche très abstraite de l'analyse qui est souvent utilisée de manière plus concrète. La multiplicité de termes et de lignes d'écriture pour tenter de les résoudre en fait une difficulté notable du programme de terminale. Les élèves auront donc parfois l'impression que leur professeur est, comme ce professeur d'économie, en train de réaliser des choses totalement incongrues. Pourtant, la résolution des équations différentielles est essentielle pour étudier de nombreuses notions de physique, notamment pour l'étude des vitesses et des forces.

Calculs astronomiques à Babylone

Des tablettes montrent que les Babyloniens possédaient déjà une maîtrise suffisante de la géométrie pour calculer la course de Jupiter, quatorze siècles avant les Européens

Ne jamais jeter de vieilles images, surtout quand elles représentent des objets très anciens. C'est grâce à des photographies de tablettes babyloniennes qu'un historien de l'astronomie, Mathieu Ossendrijver, vient de découvrir à quel point les mathématiciens de l'époque pratiquaient l'abstraction. Des travaux qui ont eu les honneurs de la couverture du magazine *Science* le 29 janvier.

Au ^{xix}^e siècle, époque majeure pour les fouilles archéologiques – officielles et sauvages –, quantité d'objets sont venus enrichir les collections des musées. C'est ainsi que le British Museum, à Londres, possède plus de 130 000 tablettes d'argile provenant des cités de Babylone et d'Uruk. Gravées de lignes serrées en écriture cunéiforme – et vierges de représentations graphiques –, elles nous ont beaucoup appris sur la vie quotidienne, l'économie, les mathématiques ou le droit mésopotamiens. Parmi ces tablettes plus ou moins bien conservées, quelques centaines seulement démontrent l'intérêt des mathématiciens de Babylone pour l'astronomie.

« En 2014, l'assyriologue Hermann Hunger, de l'université de Vienne, est venu passer deux semaines dans mon laboratoire de l'université Humboldt à Berlin, raconte Mathieu Ossendrijver, astrophysicien converti à l'histoire de sa discipline. Il avait apporté un jeu de photos vieilles d'une cinquantaine d'années, qu'il m'a laissé, estimant ne rien pouvoir en faire. » Le chercheur a découvert que l'une d'entre elles portait des nombres identiques à ceux qu'il avait observés sur un lot de quatre tablettes fabriquées entre 350 et 50 ans avant J.-C., qui l'occupait depuis quatorze ans : quatre plaques gravées de calculs évoquant la méthode des trapèzes, une technique géométrique qui

permet de calculer des surfaces. De leur contexte, M. Ossendrijver n'avait qu'une certitude : elles mentionnaient Jupiter. La cinquième tablette lui a permis de résoudre l'énigme. Elle décrit en détail la procédure de calcul appliquée dans les quatre autres, l'algorithme mis en œuvre pour déduire la distance parcourue par Jupiter sur l'écliptique, à partir de l'évolution de sa vitesse angulaire au fil du temps. Des calculs qui portent sur les soixante premiers jours du cycle de la planète, qui démarre quand elle commence à être visible dans le ciel, juste avant l'aube.

Les Babyloniens n'avaient aucune idée de la géométrie de notre Système solaire, et encore moins des lois qui gouvernent le mouvement des astres ou de la notion de plan de l'écliptique, celui dans lequel la Terre tourne autour du Soleil. Mais ils avaient observé que, vus de la Terre, les planètes et le Soleil se déplacent suivant une ligne dans le ciel, que nous appelons écliptique. Leurs calculs astronomiques se bornaient donc à prévoir quand une planète apparaît ou disparaît et à estimer la vitesse angulaire de son déplacement sur cette ligne. Une trajectoire qui forme une boucle, suivant l'illusion optique liée au mouvement relatif de la planète et de la Terre : l'astre commence par suivre une ligne droite, puis ralentit et repart dans l'autre sens, en accélérant, tout en dessinant une boucle – c'est le mouvement rétrograde –, avant de ralentir et d'achever son mouvement rétrograde en accélérant à nouveau dans la direction de départ.

« Ces tablettes montrent comment les Babyloniens calculaient le déplacement de Jupiter, en supposant que sa vitesse varie de manière linéaire dans le temps », explique le Danois Jens Horup, l'un des meilleurs spécialistes des mathématiques

babyloniennes, qui salue « le travail remarquable de Mathieu Ossendrijver ». « Cela revient à tracer la courbe qui représente la variation de vitesse en fonction du temps, puis à calculer la surface sous cette courbe qui correspond à la distance parcourue. » Ce que les mathématiciens appellent un calcul intégral, pour lequel le découpage de cette surface en trapèzes est un outil simple, mais efficace en première approximation. « Mais attention, cela ne signifie pas que les mathématiciens de l'époque faisaient des schémas, on n'en a jamais retrouvé. C'est simplement une astuce de calcul », souligne de son côté Jim Ritter, de l'Institut de mathématiques de Jussieu, à Paris.

A dire vrai, personne n'est capable de dire s'il s'agissait bien de calculs à vocation astronomique ou de la simple application de la méthode des trapèzes à l'exemple

POURQUOI CET ARTICLE

De tout temps, l'astronomie a été une science qui questionnait et passionnait les hommes. Cet article révèle que les Babyloniens avaient déjà un grand intérêt pour le mouvement des planètes, même si leurs connaissances physiques de ce phénomène étaient très limitées. Pourtant, en utilisant l'abstraction et la méthode de calcul intégral, appelée méthode des trapèzes, ils ont pu déterminer des périodes de cycle de la planète Jupiter. Cette prouesse mathématique pour l'époque, basée sur des calculs abstraits, démontre qu'ils avaient déjà perçu les prémices du calcul intégral de l'aire sous une courbe. Cette méthode, bien que complétée depuis, est toujours utilisée aujourd'hui, et les traces laissées par les Babyloniens nous prouvent que leurs connaissances étaient déjà suffisantes pour qu'ils réalisent de nombreuses études, encore d'actualité.

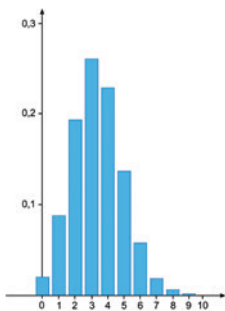
de la trajectoire de Jupiter, planète qui symbolise Mardouk, le plus important des dieux babyloniens. « *Dans les tablettes, il s'agit de déterminer en combien de jours Jupiter parcourt la moitié de la distance qu'elle accomplit en soixante jours, ce qui revient à déterminer deux trapèzes de même surface. La réponse est d'un peu plus de vingt-huit jours, puisque la vitesse n'est pas constante, mais elle n'a pas d'intérêt en astronomie* », souligne Mathieu Ossendrijver.

Pour autant, ces tablettes montrent que les Babyloniens, s'ils ne maîtrisaient pas la géométrie comme les Grecs le feront plus tard, possédaient déjà une capacité à l'abstraction suffisante pour effectuer des calculs dans un espace mathématique abstrait dont l'une des dimensions est le temps. « *C'est le plus ancien exemple de lien entre un raisonnement géométrique et l'astronomie mathématique. Et, même si on ne sait pas s'il s'agit simplement d'un algorithme, le*

vocabulaire employé dans les tablettes est bien géométrique », se réjouit Jim Ritter. Après l'abandon de l'écriture cunéiforme, vers l'an 100 de l'ère chrétienne, qui signa l'oubli du savoir babylonien, un tel lien ne réapparaîtra qu'au XIV^e siècle, chez les philosophes mathématiciens d'Oxford et de Paris. ●

Denis Delbecq, *Le Monde*
daté du 03.02.2016

PROBABILITÉS



```
def factorielle(n):
    a = 1
    for i in range(1, n+1):
        a = a*i
    return a

def coeff(k, n):
    b = factorielle(n)/(factorielle(k)*factorielle(n-k))
    return b

def binom(n, p, k):
    c = coeff(k, n)*(p**k)*((1-p)**(n-k))
    return c

def bino2(n, p, k):
    d = 0
    for i in range(k+1):
        d = d+coeff(i, n)*(p**i)*((1-p)**(n-i))
    return d

def seuil(n, p, alpha):
    e = 0
    while bino2(n, p, e) < alpha:
        e = e+1
    return e
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
from math import *
from random import *

n = int(input("nombre de points = "))
c = 0
for i in range(n):
    x = random()
    y = random()
    if x**2+y**2 < 1:
        plt.plot(x, y, 'r.-')
        c = c+1
    else:
        plt.plot(x, y, 'b.-')

print(4*c/n)

plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Méthode de Monte Carlo')
plt.grid(True)
plt.savefig('test.png')
plt.show
```

```
from random import random
from math import sqrt

def simul(valeurs, probabilités):
    nb = random()
    pcumul = 0
    for i in range(len(valeurs)):
        if pcumul <= nb < pcumul+probabilités[i]:
            return valeurs[i]
        pcumul = pcumul+probabilités[i]

def un_echantillon(valeurs, probabilités, taille):
    ech = []
    for j in range(taille):
        ech.append(simul(valeurs, probabilités))
    return ech

def N_echantillon(valeurs, probabilités, taille, N):
    Grand_ech = []
    for k in range(N):
        Grand_ech.append(un_echantillon(valeurs, probabilités, taille))
    return Grand_ech
```

Succession d'épreuves indépendantes, schéma de Bernoulli

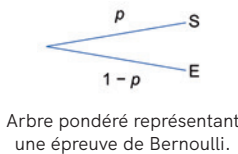
Les probabilités sont un domaine des mathématiques de plus en plus abordé en classe. L'axe majeur traité dans ce chapitre est l'étude de la succession d'un nombre quelconque d'épreuves aléatoires indépendantes.

Que faut-il savoir sur la loi de Bernoulli ?

Ici, p désigne un réel de l'intervalle $[0; 1]$. Une épreuve de Bernoulli de paramètre p est une épreuve à deux issues possibles, nommées succès et échec, telle que la probabilité du succès soit égale à p .

On peut noter S l'événement « obtenir le succès », et E l'événement « obtenir l'échec ». On a donc $E = \bar{S}$. Comme $p(S) = p$ et $p(E) + p(S) = 1$, on a $p(E) = 1 - p$.

On peut aussi définir la loi de Bernoulli de paramètre p comme étant la loi de la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de suc-



cès et 0 en cas d'échec.

Notation : Si X est une variable aléatoire discrète suivant la loi de Bernoulli de paramètre p , alors on note $X : B(1; p)$ ou parfois $X : B(p)$.

Tableau représentant la loi de probabilité de X avec $X : B(1; p)$:

x_i	0	1
$p(X = x_i)$	$1 - p$	p

Exemple : Jeter un dé et considérer que le succès est d'obtenir un 6. La variable aléatoire X suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$, associée à cette expérience, a pour loi de probabilité :

x_i	0	1
$p(X = x_i)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

Propriétés : Si $X : B(1; p)$, alors on a trois formules qui donnent la valeur de l'espérance, de la variance et de l'écart type de la variable aléatoire X en fonction du paramètre p : $E(X) = p$, $V(X) = p(1 - p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$.

Exemple : Dans le cas du dé étudié précédemment, on a : $E(X) = \frac{1}{6}$, $V(X) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$ et $\sigma(X) = \sqrt{\frac{5}{36}} = \frac{\sqrt{5}}{6}$.

Que faut-il savoir sur la loi binomiale ?

Un schéma de Bernoulli de paramètres $(n; p)$ est la répétition **indépendante** de n épreuves de Bernoulli identiques, de même paramètre p .

Remarque : On peut représenter un schéma de Bernoulli par un arbre pondéré qui comporte n niveaux.

On peut aussi définir la loi binomiale de paramètres n et p comme étant la loi de la variable

aléatoire qui compte le **nombre de succès** dans la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p .

Notation : Si X est une variable aléatoire discrète suivant la loi binomiale de paramètres n et p , alors on note $X : B(n; p)$.

Exemple : Un sac contient trois jetons : un jeton A, un jeton S et un jeton P. Une partie consiste à choisir un jeton au hasard. On gagne la partie si l'on a tiré le jeton A. Kate effectue 10 parties. On aimerait calculer la probabilité qu'elle gagne les 10 parties. On a répété de manière identique et indépendante $n = 10$ fois l'épreuve de Bernoulli : « Effectuer une partie » dont le succès « Gagner la partie » a pour probabilité $p = \frac{1}{3}$.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

On a alors $X : B\left(10; \frac{1}{3}\right)$.

Donc on a : $p(\{X = 10\}) = \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$.

En effet, avec un arbre pondéré représentant la situation, on observe qu'un seul chemin représente une succession de 10 succès, et sur les 10 branches de ce chemin est inscrit le réel $\frac{1}{3}$.

De la même manière, pour n'avoir aucun succès, on a : $p(\{X = 0\}) = \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$.

MOTS CLÉS

VARIABLE ALÉATOIRE

Soit E une expérience aléatoire et Ω l'univers associé. Une variable aléatoire X est une application qui, à chaque issue de l'univers Ω , associe un nombre réel.

LOI DE BERNOULLI

Une épreuve de Bernoulli de paramètre p ($p \in [0; 1]$), est une épreuve à deux issues possibles, nommées succès et échec, telle que la probabilité du succès soit égale à p .

LOI BINOMIALE

Un schéma de Bernoulli de paramètres $(n; p)$ est la répétition **indépendante** de n épreuves de Bernoulli identiques, de même paramètre p .

La loi binomiale compte alors le **nombre de succès** dans la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre p .

COEFFICIENTS BINOMIAUX

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ESPÉRANCE

— Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est $p_i = p(X = x_i)$, pour $1 \leq i \leq n$. L'espérance de X est le nombre réel, noté $E(X)$, défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$

— L'espérance est la « moyenne » des valeurs prises par X lors d'un grand nombre de répétitions de l'expérience.

VARIANCE

— La variance de X est le nombre réel, noté $V(X)$, qui vérifie

$$V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = E(X^2) - E(X)^2$$

— La variance est un paramètre de dispersion de la série. Elle mesure la façon dont les valeurs de X se dispersent autour de la moyenne.

Soit k un entier compris entre 0 et n .

Le nombre $\binom{n}{k}$, appelé **coefficient binomial**,

correspond au nombre de chemins qui réalisent exactement k succès dans l'arbre à n niveaux, associé à un schéma de Bernoulli.

Rappel : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Propriété : soient $X : B(n; p)$ et k un entier compris entre 0 et n .

La probabilité d'obtenir exactement k succès, et donc $n - k$ échecs, est égale à :

$$p(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

Exemple : En reprenant le sac avec les trois jetons, Kate fait 10 parties et gagne à chaque partie si elle pioche le jeton A. Calculons à présent la probabilité que Kate gagne exactement 7 parties.

$$p(X = 7) = \binom{10}{7} \times \left(\frac{1}{3}\right)^7 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{10-7} \approx 0,01626.$$

Propriétés : Si $X : B(n; p)$, on a trois formules qui donnent l'espérance, la variance et l'écart type de la variable aléatoire X en fonction des paramètres n et p : $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Propriétés : Soient $X : B(n; p)$, et k un entier compris entre 0 et n .

La probabilité d'obtenir au plus k succès est égale à :

$$p(X \leq k) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \times p^i \times (1-p)^{n-i}$$

La probabilité d'obtenir au moins k succès est égale à :

$$p(X \geq k) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \times p^i \times (1-p)^{n-i}$$

Remarque : En fonction du modèle de calculatrice, on peut effectuer une combinaison de touches qui permet de calculer directement $p(X = k)$ ou $p(X \leq k)$, selon la question posée.

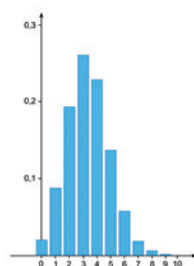
Exemple : En reprenant le sac avec les trois jetons, Kate fait 10 parties et gagne à chaque partie si elle pioche le jeton A. Calculons maintenant la probabilité que Kate gagne au maximum 7 parties.

$$p(X \leq 7) = \sum_{i=0}^7 \binom{10}{i} \times \left(\frac{1}{3}\right)^i \times \left(\frac{2}{3}\right)^{10-i} \approx 0,997.$$

Représentation graphique :

On peut représenter graphiquement la loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète suivant une loi binomiale de paramètres n et p à l'aide d'un diagramme en barre ou d'un histogramme. Le nombre de succès possibles est en abscisse, la probabilité de k succès est en ordonnée.

Exemple : En reprenant le sac avec les trois jetons, Kate fait toujours 10 parties et gagne à chaque partie si elle pioche le jeton A. On obtient alors l'histogramme ci-dessous :



Comment peut-on utiliser Python en lien avec la loi binomiale ?

Soit α un réel de l'intervalle $[0; 1]$. Soient $X : B(n; p)$ et k un entier compris entre 0 et n .

Recherche de seuil : On peut être amené à chercher le plus petit entier naturel k vérifiant $p(X \leq k) \geq \alpha$. Voici un script contenant

plusieurs fonctions utiles dans ce chapitre et répondant à la recherche :

```
def factorielle(n):
    a = 1
    for i in range(1, n+1):
        a = a*i
    return a

def coeff(k, n):
    b = factorielle(n)/(factorielle(k)*factorielle(n-k))
    return b

def binom1(n, p, k):
    c = coeff(k, n)*(p**k)*((1-p)**(n-k))
    return c

def binom2(n, p, k):
    d = 0
    for i in range(k+1):
        d = d+coeff(i, n)*(p**i)*((1-p)**(n-i))
    return d

def seuil(n, p, alpha):
    e = 0
    while binom2(n, p, e) < alpha:
        e = e+1
    return e
```

- La première fonction permet de calculer la factorielle de tout entier n .
- La deuxième fonction permet de calculer un coefficient binomial en connaissant n et k .
- La troisième fonction permet de calculer la probabilité d'obtenir k succès dans le cas d'une loi binomiale.
- La quatrième fonction permet de calculer la probabilité d'obtenir au plus k succès dans le cas d'une loi binomiale.
- La dernière fonction permet de déterminer le plus petit entier naturel k vérifiant $p(X \leq k) \geq \alpha$.

UN ARTICLE DU MONDE À CONSULTER

L'égalité femmes-hommes, c'est aussi mathématique p. 70
(Étienne Ghys, *Le Monde* daté du 6.12.2017)

ÉCART TYPE

– L'écart type d'une série statistique est le nombre $\sigma(X)$ égal à la racine carrée de la variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

– L'écart type mesure la façon dont les valeurs de X se dispersent autour de la moyenne.

LOI DE BERNOULLI : ESPÉRANCE, VARIANCE, ÉCART TYPE

$$E(X) = p, V(X) = p(1-p) \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}.$$

LOI BINOMIALE : ESPÉRANCE, VARIANCE, ÉCART TYPE

$$E(X) = np, V(X) = np(1-p) \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}.$$

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

La théorie des probabilités est une mathématisation de l'incertitude et du caractère imprévisible des phénomènes. Pendant l'Antiquité, le hasard n'était pas un objet d'étude et cette notion d'incertitude a longtemps été attribuée au destin ou aux divinités.

Au XII^e siècle, pour l'évaluation de contrats commerciaux, apparaît alors la notion de « risque » qui sera le point de départ de l'étude des probabilités. Mais la théorie des probabilités débute réellement au XVII^e siècle avec Fermat et Pascal, autour du problème des partis, c'est-à-dire la répartition inégale de points à la fin d'une partie que plusieurs joueurs ont convenu de ne pas achever. Huygens prend connaissance de cette discussion entre les deux mathématiciens et publie le premier traité sur la théorie probabiliste en 1657.

La parution de *l'Ars Conjectandi* de Jacques Bernoulli (1713), reprenant notamment les anciens travaux de Huygens, marque une rupture dans l'histoire des probabilités. On y trouve la première étude de la distribution binomiale, introduite dans le cadre d'un tirage sans remise pour un modèle d'urne, ainsi que divers problèmes combinatoires, notamment le binôme de Newton. Son traité contient également une description de l'estimation d'un phénomène aléatoire en s'appuyant sur des fréquences. C'est grâce aux fréquences qu'il établit l'un des résultats majeurs de cet ouvrage : son « théorème d'or », qui sera plus tard généralisé et deviendra le théorème actuel appelé « loi des grands nombres ».

Sommes de variables aléatoires

On approfondit dans ce chapitre l'étude de l'espérance et de la variance dans le cadre des variables aléatoires finies. La linéarité de l'espérance donne un outil très puissant permettant de déterminer l'espérance d'une variable aléatoire sans avoir à en déterminer la loi. L'additivité de la variance pour les variables indépendantes est présentée dans le cadre de la succession d'épreuves indépendantes.

Comment peut-on calculer la somme de deux variables aléatoires discrètes ?

Soit E une expérience aléatoire et Ω son univers associé. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes, avec $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1; y_2; \dots; y_m\}$ (n et m deux entiers naturels non nuls). On peut définir la variable aléatoire Z telle que $Z = X + Y$, avec pour tout $k \in (X + Y)(\Omega)$:

$$p(Z = k) = p(X + Y = k) = \sum_{i=1}^n p(\{X = x_i\} \cap \{Y = k - x_i\})$$

$$p(Z = k) = \sum_{j=1}^m p(\{X = k - y_j\} \cap \{Y = y_j\})$$

Exemple : On lance un dé à 6 faces (3 faces blanches et 3 faces noires) et un dé à 4 faces (1 face rouge et 3 faces bleues) en même temps. On note Ω l'univers associé à cette expérience aléatoire. Une face blanche rapporte 1 point, une face noire 2 points, une face rouge 3 points et une face bleue 4 points.

On note S la variable aléatoire égale au nombre de points apportés par le dé à 6 faces, et Q la variable aléatoire égale au nombre de points rapportés par le dé à 4 faces. On a donc :

$$\Omega = \{(\text{Blanc, Rouge}), (\text{Blanc, Bleu}), (\text{Noir, Rouge}), (\text{Noir, Bleu})\}$$

$$S(\Omega) = \{1; 2\} \text{ et } Q(\Omega) = \{3; 4\}.$$

$$\text{On a } p(S=1) = p(S=2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, p(Q=3) = \frac{1}{4} \text{ et } p(Q=4) = \frac{3}{4}.$$

On peut créer une variable aléatoire Z portant sur le nombre de points apportés par les deux dés.

$$\text{On a } Z = S + Q \text{ et } Z(\Omega) = (S + Q)(\Omega) = \{1+3; 1+4; 2+3; 2+4\} = \{4; 5; 6\}.$$

$$\text{Donc } p(Z=5) = p(S+Q=5) = p(\{S=1\} \cap \{Q=4\}) + p(\{S=2\} \cap \{Q=3\}) = p(\text{Blanc ; Bleu}) + p(\text{Noir ; Rouge}).$$

À l'aide d'un arbre pondéré, on trouve facilement :

$$p(Z=5) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}.$$

En procédant de la même manière pour les autres valeurs, on obtient la loi de probabilité de Z :

z_i	4	5	6
$p(Z = z_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$

Que faut-il retenir concernant la linéarité de l'espérance ?

Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$. L'espérance mathématique de X est le nombre réel, noté $E(X)$, qui vérifie : $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i \times p(X = x_i)$.

Propriété 1 : Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes. On a : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

Exemple : Si l'on reprend l'exemple avec les deux dés aux faces colorées, on a $E(S) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = 1,5$ et $E(Q) = 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{3}{4} = 3,75$. On a donc

$$E(Z) = E(S + Q) = E(S) + E(Q) = 1,5 + 3,75 = 5,25.$$

On peut aussi vérifier, grâce à la loi de Z , que

$$E(Z) = 4 \times \frac{1}{8} + 5 \times \frac{1}{2} + 6 \times \frac{3}{8} = 5,25.$$

RAPPELS DE PREMIÈRE

ÉQUIPROBABILITÉ

Lorsque l'on fait une hypothèse d'équiprobabilité, on associe à toutes les issues de l'univers Ω la même probabilité.

Dans ce cas, la probabilité d'un événement A est :

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega}.$$

PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

La probabilité de l'événement B sachant que l'événement A est réalisé se note $p_A(B)$ et s'obtient grâce à

un arbre de probabilité ou grâce à la formule :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}, \text{ si } p(A) \neq 0.$$

De cette définition de la probabilité conditionnelle, on obtient les propriétés suivantes :

$$- p_A(B) + p_A(\bar{B}) = 1$$

$$- p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A) \times p_A(B)}{p(B)}$$

INDÉPENDANCE

Deux événements sont indépendants lorsque la réalisation de l'un n'influence pas la réalisation de l'autre. On a donc dans ce cas : $p_A(B) = p(B)$. Ainsi, les événements A et B sont indépendants si et seulement si : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Attention : il ne faut pas confondre « A et B sont indépendants », avec « A et B sont incompatibles » qui signifie que $p(A \cap B) = 0$.

FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

Soit une partition $A_1, A_2, \dots, A_n$ de l'univers Ω , et soit B un événement quelconque de Ω .

On a : $p(B) = p(B \cap A_1) + p(B \cap A_2) + \dots + p(B \cap A_n)$.

Avec les probabilités conditionnelles, on obtient alors :

$$p(B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + p(A_2) \times p_{A_2}(B) + \dots + p(A_n) \times p_{A_n}(B).$$

Dans le cas de la partition élémentaire avec seulement A et $\bar{A}$, on a pour tout B : $p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \bar{A})$.

Propriété 2 : Soient a et b deux réels. Soit X une variable aléatoire discrète. On a : $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Exemple : On lance une pièce de monnaie truquée qui vérifie : $p(\text{Pile}) = 0,7$. Pour ce jeu, il n'y a pas de mise de départ ; obtenir pile rapporte 3 euros, obtenir face fait perdre 2 euros.

Soit G la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur après une partie.

G admet comme loi de probabilité :

g_i	-2	3
$p(G = g_i)$	0,3	0,7

Alors : $E(G) = -2 \times 0,3 + 3 \times 0,7 = 1,5$.

Les règles du jeu changent : les gains et les pertes sont doublés.

Au lieu de recommencer l'exemple, on peut utiliser une variable aléatoire H telle que $H = 2G$.

On obtient : $E(H) = E(2G) = 2 \times E(G) = 2 \times 1,5 = 3$.

Que faut-il retenir sur les variables aléatoires discrètes indépendantes ?

Soit E une expérience aléatoire et Ω son univers associé. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes avec $X(\Omega) = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1 ; y_2 ; \dots ; y_m\}$ (n et m deux entiers naturels non nuls).

Les variables aléatoires X et Y sont **indépendantes** si et seulement si pour tout entier i et tout entier j tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$, on a : $p(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = p(\{X = x_i\}) \times p(\{Y = y_j\})$. Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \{x_1 ; x_2 ; \dots ; x_n\}$. La variance de X est le nombre réel, noté $V(X)$, qui vérifie :

$$V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Propriété 1 : Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes, alors $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Exemple : Si l'on reprend l'exemple avec les deux dés aux faces colorées, on a : $V(S) = (1 - 1,5)^2 \times \frac{1}{2} + (2 - 1,5)^2 \times \frac{1}{2} = 0,25$ et

$$V(Q) = (3 - 3,75)^2 \times \frac{1}{4} + (4 - 3,75)^2 \times \frac{3}{4} = 0,1875.$$

Alors $V(Z) = V(S + Q) = V(S) + V(Q)$, car S et Q sont indépendantes (les deux dés sont lancés en même temps, et le résultat du premier dé n'a aucune influence sur le résultat du second. Donc $V(Z) = 0,25 + 0,1875 = 0,4375$.

Propriété 2 : Soit a un réel et X une variable aléatoire discrète. On a : $V(aX) = a^2 V(X)$.

Exemple : On lance de nouveau la pièce de monnaie truquée qui vérifie : $p(\text{Pile}) = 0,7$.

La variable aléatoire G donnant le gain algébrique du joueur après une partie n'est pas modifiée.

On avait : $E(G) = 1,5$.

On a : $V(G) = (-2 - 1,5)^2 \times 0,3 + (3 - 1,5)^2 \times 0,7 = 5,25$.

Les règles du jeu changent : les gains et les pertes sont triplés. On peut utiliser une variable aléatoire H telle que $H = 3G$.

On obtient : $V(H) = V(3G) = 3^2 \times V(G) = 9 \times 5,25 = 47,25$.

Que faut-il retenir sur l'échantillon d'une loi de probabilité ?

Soit n un entier naturel non nul. Un échantillon de taille n d'une loi de probabilité est une liste $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ de n variables aléatoires **indépendantes** identiques suivant cette loi.

Propriétés : Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon d'une loi de probabilité. Soient les deux variables aléatoires S_n et M_n telles que :

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \text{ et } M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

$$\bullet E(S_n) = n \times E(X_i) \text{ et } E(M_n) = E(X_i).$$

$$\bullet V(S_n) = n \times V(X_i) \text{ et } V(M_n) = \frac{V(X_i)}{n}.$$

$$\bullet \sigma(S_n) = \sqrt{n} \times \sigma(X_i) \text{ et } \sigma(M_n) = \frac{\sigma(X_i)}{\sqrt{n}}.$$

Que faut-il retenir concernant la loi binomiale ?

Propriétés : Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon de la loi de Bernoulli de paramètre p ($p \in [0 ; 1]$). Alors la variable aléatoire $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ suit la loi binomiale de paramètres n et p .

$$E(X) = np, V(X) = np(1-p) \text{ et } \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}.$$

Démonstrations :

Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, $X_i : B(1 ; p)$, alors on a : $E(X_i) = p$; $V(X_i) = p(1-p)$ et

$$\sigma(X_i) = \sqrt{p(1-p)}.$$

Avec les propriétés de l'espérance et de la variance, on obtient pour la variable aléatoire X : $E(X) = n \times p$, $V(X) = n \times p(1-p)$ et

$$\sigma(X) = \sqrt{n} \times \sqrt{p(1-p)} = \sqrt{np(1-p)}.$$

Exemple : Un sac contient trois jetons : un jeton A, un jeton S et un jeton P. Une partie consiste à choisir un jeton au hasard ; on gagne si on tire le jeton A. Kate effectue 10 parties. On peut modéliser la situation à l'aide d'une variable aléatoire X . On a alors

$$X : B\left(10; \frac{1}{3}\right).$$

$$E(X) = 10 \times \frac{1}{3} = \frac{10}{3} \approx 3,33.$$

$$\bullet V(X) = 10 \times \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{20}{9} \text{ et}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{20}{9}} \approx 0,497.$$

• Cela signifie que si Kate répète un très grand nombre de fois son expérience aléatoire de « jouer à 10 parties », elle gagnera en moyenne environ 3,33 parties par expérience avec une dispersion moyenne de 0,5 partie.

POUR ALLER PLUS LOIN : D'AUTRES LOIS

Dans ces deux premiers chapitres, nous avons traité l'étude de deux lois discrètes (la loi de Bernoulli et la loi binomiale) et de leurs indicateurs (l'espérance, la variance et l'écart type). Il existe cependant deux autres lois discrètes bien connues et utiles que nous allons aborder ici.

LOI UNIFORME

Cette loi permet de modéliser des situations d'équiprobabilités, comme le lancer d'un dé équilibré.

On dit qu'une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** discrète lorsqu'elle prend ses valeurs dans l'univers $\Omega = \{1 ; \dots ; n\}$ avec des probabilités qui sont toutes égales pour chaque élément de Ω choisi.

On a alors : pour tout $k \in \{1 ; \dots ; n\}$, $p(X = k) = \frac{1}{n}$.

On calcule assez facilement les indicateurs de la loi uniforme : $E(X) = \frac{n+1}{2}$ et $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

LOI DE POISSON

Cette loi permet de modéliser les événements rares, comme le nombre d'appels reçus par un standard téléphonique, ou le nombre de voyageurs se présentant à un guichet dans la journée.

On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, notée $P(\lambda)$, lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$p(X = k) = e^{-\lambda} \times \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Dans le cas de la loi de Poisson, on a : $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.

APPROXIMATION D'UNE LOI BINOMIALE PAR UNE LOI DE POISSON

On peut parfois réaliser une approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson :

Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p , avec n grand ($n \geq 30$) et p petit ($p \leq 0,1$), alors pour tout $k \geq 0$, $p(X = k) \approx p(Y = k)$, où Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = n \times p$.

Concentration, loi des grands nombres

Dans ce troisième chapitre, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev explicite le rôle de la variance comme indicateur de dispersion. Tous ces outils se conjuguent pour établir l'inégalité de concentration pour la moyenne d'un échantillon d'une variable aléatoire.

Quelles sont les formules de majoration à connaître ?

Propriété : Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
Soient X une variable aléatoire discrète, et δ un réel strictement positif.

$$p(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2} \text{ ou } p(|X - E(X)| < \delta) \geq 1 - \frac{V(X)}{\delta^2}.$$

Exemple 1 : Si, pour une certaine variable aléatoire X , $E(X) = 10$ et $V(X) = 0,01$, alors sans aucune indication particulière sur la loi de X , on sait que X prendra des valeurs entre 9,7 et 10,3 avec une probabilité supérieure à 0,88. Évidemment, si on connaît la loi de X , on peut calculer directement la valeur de cette probabilité.

Remarque : Ayant un caractère universel, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev possède cependant un défaut : les majorations obtenues ne sont pas très précises.

Exemple 2 : Soit $X : B(10 ; 0,5)$. On a $E(X) = 10 \times 0,5 = 5$ et $V(X) = 10 \times 0,5 \times (1 - 0,5) = 2,5$. Soit $\delta = 4$. On a alors :

$$p(|X - 5| \geq 4) \leq \frac{2,5}{4^2} \Leftrightarrow p(|X - 5| \geq 4) \leq 0,15625.$$

Or $|X - 5| \geq 4 \Leftrightarrow X - 5 \geq 4$ ou $-(X - 5) \geq 4 \Leftrightarrow X \geq 9$ ou $X \leq 1$.

$$\begin{aligned} p(|X - 5| \geq 4) &= p(\{X \geq 9\} \cup \{X \leq 1\}) = p(X \geq 9) + p(X \leq 1) \\ p(|X - 5| \geq 4) &= p(\{X = 0\}) + p(X = 1) + p(X = 9) + p(X = 10) \approx 0,021. \end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité $p(|X - 5| \geq 4) \leq 0,15625$ est vraie mais peu « précise ».

Propriété : Inégalité de concentration

Soient n un entier naturel non nul, $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon d'une loi de probabilité d'espérance μ et de variance V , δ un réel strictement positif. On pose $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$.

$$\text{On a : } p(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}.$$

Exemple : Combien de fois faut-il lancer une pièce équilibrée pour que la fréquence d'apparition de la face pile soit comprise strictement entre 0,45 et 0,55 avec une probabilité d'au moins 0,99 ?

Soit $X : B(1 ; 0,5)$. On a : $E(X) = p = 0,5$ et $V(X) = p(1 - p) = 0,25$. Soient n un entier non

nul et $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon de taille n de la variable aléatoire X . On pose $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$.

On cherche l'entier n tel que $p(0,45 < M_n < 0,55) \geq 0,99$, c'est-à-dire $p(|M_n - 0,5| \geq 0,05) \leq 0,01$.

D'après l'inégalité de concentration, on a :

$$p(|M_n - 0,5| \geq 0,05) \leq \frac{V(X)}{n \times 0,05^2}. \text{ D'où}$$

$$p(|M_n - 0,5| \geq 0,05) \leq \frac{0,25}{n \times 0,0025}$$

$$\Leftrightarrow p(|M_n - 0,5| \geq 0,05) \leq \frac{100}{n}$$

Il suffit donc d'avoir $\frac{100}{n} \leq 0,01$, c'est-à-dire $n \geq 10\,000$.

Il suffit donc de lancer la pièce 10 000 fois pour que la fréquence d'apparition de la face pile soit comprise strictement entre 0,45 et 0,55 avec une probabilité d'au moins 0,99.

Que faut-il retenir sur la loi faible des grands nombres ?

Propriété : Loi faible des grands nombres

Soient n un entier naturel non nul, $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon d'une loi de probabilité d'espérance μ , et δ un réel strictement positif.

$$\text{On pose } M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}.$$

$$\text{On a : } \lim_{n \rightarrow \infty} p(|M_n - \mu| \geq \delta) = 0.$$

Remarques : On peut reformuler la propriété en : « Lorsque n est grand, sauf exception, la fréquence observée est proche de la probabilité. »

La limite de la propriété est équivalente à : $\lim_{n \rightarrow \infty} p(\mu - \delta < M_n < \mu + \delta) = 1$.

POUR ALLER PLUS LOIN : ESTIMATION

FRÉQUENCE

En statistique, la fréquence d'une valeur est le quotient entre son effectif et la taille de la population. On exprime cette fréquence sous la forme d'un pourcentage ou d'un nombre décimal.

INTERVALLE DE CONFIANCE ET LIEN AVEC LA FLUCTUATION

Lorsque l'on veut connaître une information sur l'ensemble d'une population, il est compliqué d'interroger

l'ensemble des personnes concernées. On constitue un échantillon représentatif, puis on étend les résultats obtenus.

L'expérience montre que, lorsqu'on choisit un autre échantillon représentatif, on obtient des résultats assez proches. Aussi, pour avoir une meilleure approximation du résultat, on va donner un « intervalle de confiance » qui permet de limiter les effets de la fluctuation en fonction des échantillons.

« AU SEUIL DE 95 % DE LA FRÉQUENCE »

La phrase « au seuil de 95 % de la fréquence » signifie « avec une marge d'erreur de 5 % ».

INTERVALLE DE FLUCTUATION AU SEUIL DE 95 % DE LA FRÉQUENCE

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p , $X : B(n, p)$, avec $0 < p < 1$, $n \geq 30$, $np > 5$ et $n(1 - p) > 5$.

On appelle intervalle asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence l'intervalle :

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

INTERVALLE DE CONFIANCE

Il s'agit de savoir comment estimer la proportion p d'individus dans une population ayant une propriété identique. Pour cela, on utilise la

Démonstration : On sait que : $E(M_n) = E(X) = \mu$
et $V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$.

En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a : pour tout réel strictement

$$\text{positif } \delta, \quad p(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{\frac{V(X)}{n}}{\delta^2}, \text{ soit}$$

$$p(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\delta^2}. \text{ Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V(X)}{n\delta^2} = 0.$$

Donc, grâce au théorème des gendarmes, on obtient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(|M_n - \mu| \geq \delta) = 0$.

Exemple : La méthode de Monte-Carlo

On souhaite déterminer, à l'aide d'une simulation, une valeur approchée du nombre réel π . On va pour cela imaginer une cible carrée ABCD de côté 1. On construit le quart de cercle de centre A et de rayon AB. On note E l'expérience aléatoire : « On lance une fléchette sur la cible ». On estime que la fléchette atteint toujours la cible et que la probabilité que la fléchette atteigne une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone.

Si on pose A l'événement : « La fléchette touche le quart de disque », alors on peut

$$\text{calculer que } p(A) = \frac{\frac{\pi - 1^2}{4}}{1^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Pour déterminer une valeur approchée de π , on va simuler un très grand nombre de lancers de fléchettes, et on va calculer la proportion de fléchettes atteignant le quart de disque.

La loi faible des grands nombres nous garantit que plus la taille de l'échantillon est grande, plus la proportion des fléchettes atteignant le quart de disque va se rapprocher de $\frac{\pi}{4}$.

Voici un script permettant donc de déterminer une valeur approchée de π :

```
import matplotlib.pyplot as plt
from math import *
from random import *

n = int(input("nombre de points = "))
c = 0
for i in range(n):
    x = random()
    y = random()
    if x**2+y**2 < 1 :
        plt.plot(x,y,'r.-')
        c = c+1
    else:
        plt.plot(x,y,'b.-')

print(4*c/n)

plt.xlabel('x')
plt.ylabel('y')
plt.title('Méthode de Monte Carlo')
plt.grid(True)
plt.savefig('test.png')
plt.show
```

Comment peut-on simuler une variable aléatoire ?

Démarrage

Pour simuler une variable aléatoire, il faut donner la loi de probabilité de cette variable aléatoire, c'est-à-dire renseigner les valeurs qu'elle peut prendre et les probabilités associées. On utilisera des listes pour ces deux données.

- Le script `simul` permet, grâce à la fonction `random`, de simuler le choix aléatoire d'une valeur que peut prendre la variable aléatoire en tenant compte du poids des probabilités affectées.
- Le script `un_echantillon` permet, en affectant à la variable `taille` un entier non nul, de créer un échantillon. De même, le script `N_echantillon` permet de créer N échantillons.

```
from random import random
from math import sqrt

def simul(valeurs, probabilités):
    nb = random()
    pcumul = 0
    for i in range(len(valeurs)):
        if pcumul <= nb < pcumul+probabilités[i]:
            return valeurs[i]
        pcumul = pcumul+probabilités[i]

def un_echantillon(valeurs, probabilités, taille):
    ech = []
    for j in range(taille):
        ech.append(simul(valeurs, probabilités))
    return ech

def N_echantillon(valeurs, probabilités, taille, N):
    Grand_ech = []
    for k in range(N):
        Grand_ech.append(un_echantillon(valeurs, probabilités, taille))
    return Grand_ech
```

Paramètres

On crée trois scripts pour calculer l'espérance, la variance et l'écart type d'une variable aléatoire discrète.

La fonction `N_moyennes` permet de créer une liste qui, après avoir créé N échantillons, contient la moyenne de chaque échantillon. La fonction `ecarttype_des_N_moyennes` permet de calculer l'écart type de la liste précédente.

Plus la variable « `taille` » est grande, plus cet écart est proche de 0.

```
def esperance(valeurs, probabilités):
    e = 0
    a = len(valeurs) # la longueur de la liste
    for i in range(a):
        e = e + probabilités[i]*valeurs[i] # somme des pi*xi
    return e/som(probabilités)

def variance(valeurs, probabilités):
    var = 0
    e = esperance(valeurs, probabilités)
    n = len(valeurs)
    for i in range(n):
        var = var+probabilités[i]*(valeurs[i]-e)**2
    return var

def ecarttype(valeurs, probabilités):
    sigma = sqrt(variance(valeurs, probabilités))
    return sigma

def N_moyennes(valeurs, probabilités, taille, N):
    Grand_ech = N_echantillon(valeurs, probabilités, taille, N)
    liste_de_moyennes = []
    for i in range(len(Grand_ech)):
        liste_de_moyennes.append(sum(Grand_ech[i])/len(Grand_ech[i]))
    return liste_de_moyennes

def ecarttype_des_N_moyennes(valeurs, probabilités, taille, N):
    liste = N_moyennes(valeurs, probabilités, taille, N)
    un = [1 for i in range(N)]
    s = ecarttype(liste, un)
    return s

def ecarttype(valeurs, probabilités, taille, N):
    return ecarttype_des_N_moyennes(valeurs, probabilités, taille, N)

def proportion(valeurs, probabilités, taille, N):
    Grand_ech = N_echantillon(valeurs, probabilités, taille, N)
    for i in range(N):
        if (esperance(valeurs, probabilités)-sum(Grand_ech[i]/taille)) <= k*ecarttype(valeurs, probabilités)/sqrt(taille):
            prop = prop+1
    return prop/k
```

HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

fréquence f observée sur un échantillon de la population.

On appelle intervalle de confiance de la proportion p avec un niveau de confiance de 95 %, l'intervalle

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right], \text{ où } n \text{ est la taille}$$

de l'échantillon interrogé.

C'est grâce aux fréquences que Jacques Bernoulli établit l'un des résultats majeurs de son ouvrage *L'ars Conjectandi* : son « théorème d'or », l'actuelle « loi des grands nombres ». Ce théorème, qui relie fréquences et probabilités, valide le principe de l'échantillonnage et est le premier exemple de « théorème limite » en théorie des probabilités.

Les mathématiciens français et russe, Bienaymé et Tchebychev, ont démontré l'inégalité qui porte leur nom, en parlant de fréquences d'échantillons plutôt que de variables aléatoires. Ils

fournissent ainsi la possibilité d'une démonstration plus simple de la loi des grands nombres.

Au début du XIX^e siècle, la modélisation des erreurs de mesure va devenir centrale pour faire de la statistique une science à part entière. Lagrange et Laplace ont développé une approche probabiliste de la théorie des erreurs. Gauss imagine une méthode des moindres carrés (après Legendre), qu'il applique avec succès à la prédiction de la position d'un astéroïde. Il y propose de comprendre

l'écart type comme une « erreur moyenne à craindre ».

Finalement, l'introduction de méthodes statistiques en sociologie est l'œuvre du mathématicien et astronome belge Quételet dans les années 1830. Il réfléchit alors à la distribution de données autour de la moyenne. Ce procédé sera approfondi par l'anglais Galton, qui est l'inventeur de nombreuses méthodes statistiques couramment employées, comme l'étalonnage et la corrélation, qui lui ont notamment servi dans ses recherches sur la théorie de l'évolution.

Succession d'épreuves indépendantes, schéma de Bernoulli

Sujet. D'après sujet Bac S, Polynésie, septembre 2010

Un jeu consiste à tirer simultanément 4 boules indiscernables au toucher d'un sac contenant 1 boule noire et 9 boules blanches, puis à lancer un dé bien équilibré à six faces numérotées de 1 à 6. Si la boule noire est tirée, il faut obtenir un nombre pair avec le dé pour gagner. Si la boule noire n'est pas tirée, il faut obtenir un six avec le dé pour gagner. On appelle N l'événement : « La boule noire figure parmi les boules tirées », et G l'événement : « Le joueur gagne ».

1. a. Déterminer la probabilité de l'événement N .

b. Démontrer que la probabilité de l'événement G est égale à $\frac{3}{10}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

c. Le joueur ne gagne pas. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré la boule noire ?

2. Pour jouer à ce jeu, une mise de départ de m euros est demandée, avec m réel strictement positif.

Si le joueur gagne, il reçoit 4 euros.

S'il ne gagne pas mais qu'il a tiré la boule noire, le joueur récupère sa mise.

S'il ne gagne pas et qu'il n'a pas tiré la boule noire, le joueur perd sa mise.

On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur.

a. Déterminer la loi de probabilité de X .

b. Exprimer l'espérance mathématique de X en fonction de m .

c. On dit que le jeu est équitable si l'espérance mathématique de X est nulle. Déterminer m pour que le jeu soit équitable.

3. Soit n un entier naturel non nul.

On joue n fois à ce jeu, sachant qu'après chaque partie, les boules sont remises dans le sac.

Déterminer la valeur minimale de n pour laquelle la probabilité de gagner au moins une fois est supérieure à 0,999.

LA BONNE MÉTHODE

1. a. Les 4 boules étant tirées simultanément, l'univers est constitué de sous-ensembles à 4 éléments.

b. On pense à la formule des probabilités totales.

c. On utilise la définition des probabilités conditionnelles.

2. a. On cherche les valeurs prises par X et on utilise ce qui précède pour obtenir la loi de probabilité de X .

b. On revient à la définition de l'espérance d'une variable aléatoire dont on connaît la loi de probabilité.

c. La question ne présente aucune difficulté.

3. Il est essentiel de savoir traduire la répétition d'un nombre fini d'épreuves identiques et indépendantes en termes de schéma de Bernoulli et de connaître la loi de Z comptant le nombre de succès au cours de ce schéma. Il faut également penser à utiliser l'événement contraire de « $Z \geq 1$ », et savoir utiliser la fonction logarithme népérien.

Somme de variables aléatoires

Sujet 1.

Un point lumineux se déplace sur une droite à partir de l'origine. À chaque seconde, il se déplace d'une unité vers la droite avec la probabilité p , ou vers la gauche avec la probabilité $1 - p$, les déplacements étant supposés indépendants. On note X son abscisse après n secondes. Quelle est la loi de X et son espérance ?

Il pourra être utile d'introduire la suite de variables aléatoires $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$, où X_i est la variable aléatoire qui vaut 1 si le i -ème déplacement s'effectue vers la droite, et -1 si ce déplacement s'effectue vers la gauche, et de considérer Y_i la variable aléatoire définie par $Y_i = \frac{X_i + 1}{2}$.

LA BONNE MÉTHODE

On utilise l'indication de l'énoncé et on se ramène à une situation binomiale pour faciliter les calculs.

Sujet 2.

Soit n un entier naturel non nul. Soit $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$, une suite de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre $p \in]0 ; 1[$. On note

$$\alpha = \sum_{i=1}^n p_i.$$

$$1. \text{ Montrer que } \sum_{i=1}^n \left(p_i - \frac{\alpha}{n} \right)^2 = \sum_{i=1}^n p_i^2 - \frac{\alpha^2}{n}.$$

$$2. \text{ Calculer } v = V \left(\sum_{i=1}^n X_i \right).$$

3. Déterminer les valeurs de p_i maximisant v .

LA BONNE MÉTHODE

1. Il suffit de développer l'expression de gauche pour obtenir celle de droite.

2. On n'oublie pas que les variables sont indépendantes et qu'elles suivent toutes une loi de Bernoulli.

3. Il suffit de mettre en relation les deux premières questions.

Concentration, loi des grands nombres

Sujet 1. Application directe

Le nombre de pièces sortant d'une usine en une journée est une variable aléatoire d'espérance $m = 50$ et de variance $\sigma^2 = 25$. On veut estimer la probabilité que la production, un jour donné, dépasse 75 pièces.

LA BONNE MÉTHODE

On applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Sujet 2. Intervalle de confiance obtenu avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Un institut de sondages décide de mener une enquête concernant une élection pour laquelle deux candidats A et B se présentent. On suppose, pour simplifier les choses, que chaque individu sondé répond A ou B, à l'exclusion de toute autre réponse, et que le collège électoral est suffisamment grand pour que les réponses soient considérées comme mutuellement indépendantes. La taille de l'échantillon choisi pour faire le sondage est $n \in \mathbb{N}^*$ et, pour chaque individu i de l'échantillon, on appelle X_i la variable aléatoire égale à 1 si la réponse est favorable à A,

et 0 sinon. Chaque variable X_i est une variable de Bernoulli de paramètre p inconnu que le sondage souhaite bien sûr estimer. Les variables sont indépendantes. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $\bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$.

1. Quelle est la loi suivie par S_n ? Que représente $\bar{X}_n$? Calculer $E(\bar{X}_n)$ et $V(\bar{X}_n)$.

2. Montrer que quel que soit $x \in]0; 1[$, $0 < x(1-x) \leq \frac{1}{4}$.

3. Dédurre de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que quel que soit $t > 0$,

$$P\left(p \in \left[\bar{X}_n - t; \bar{X}_n + t\right]\right) \geq 1 - \frac{1}{4nt^2}.$$

4. Soit $t = \frac{1}{2\sqrt{0,05n}} > 0$, on a donc :

$$P\left(p \in \left[\bar{X}_n - \frac{1}{2\sqrt{0,05n}}; \bar{X}_n + \frac{1}{2\sqrt{0,05n}}\right]\right) \geq 0,95.$$

On dit que $\left[\bar{X}_n - \frac{1}{2\sqrt{0,05n}}; \bar{X}_n + \frac{1}{2\sqrt{0,05n}}\right]$ est un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 %. Un intervalle de confiance est donc un intervalle aléatoire. Dès que la variable aléatoire $\bar{X}_n$ est réalisée et donne la valeur f , l'intervalle

$$\left[f - \frac{1}{2\sqrt{0,05n}}; f + \frac{1}{2\sqrt{0,05n}}\right] \text{ qui n'est plus}$$

aléatoire est appelé une estimation de p par un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 %.

a. On suppose que $n = 10\,000$ et que les questionnaires indiquent que 520 personnes sont favorables à A. Donner une estimation de p par un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 %.

b. Combien faut-il choisir de sondés pour que p soit estimé par un intervalle de confiance au niveau de confiance 95 % d'amplitude inférieure à 1 % ?

LA BONNE MÉTHODE

1. La variable S_n est la somme de variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre. On utilise les propriétés de l'espérance et de la variance.
2. Une simple étude de fonction permet de conclure.
3. On écrit l'inégalité demandée et on utilise ce qui précède.
4. a. Il s'agit d'une simple application numérique.
b. Il s'agit d'une simple inéquation à résoudre.

L'égalité femmes-hommes, c'est aussi mathématique

Pourquoi y a-t-il à peu près autant de mâles que de femelles dans l'espèce humaine, comme dans la plupart des autres espèces animales ? Commençons par une petite énigme mathématique : dans un pays imaginaire, une loi interdit aux familles d'avoir un nouvel enfant si leur dernier-né est une fille ; quelle sera la conséquence sur la proportion d'hommes par rapport aux femmes dans ce pays ? Si cette loi est appliquée, les familles auront au plus une fille alors que le nombre de garçons sera quelconque. On peut donc penser qu'il y aura plus d'hommes que de femmes. Ce raisonnement est-il correct ? Réponse à la fin de la chronique.

Revenons au ratio hommes/femmes dans la vraie vie. On pourrait dire qu'il y a autant de spermatozoïdes X que Y et qu'ils ont la même probabilité de féconder, si bien que les garçons XY et les filles XX sont également probables. Mais cela ne fait que repousser la question. Pourquoi les X et les Y auraient-ils les mêmes chances de succès ? Une intuition de Charles Darwin a été précisée par Ronald Fisher, le grand statisticien et généticien anglais, il y a un siècle. Voici son raisonnement, pas si facile à comprendre. Supposons qu'il y ait par exemple deux fois plus d'hommes que de femmes. Comme chaque enfant a un père et une mère, le nombre moyen d'enfants par femme est le double du nombre moyen d'enfants par homme.

Mutations aléatoires

Selon la théorie de l'évolution, une mutation a tendance à se propager si elle entraîne une augmentation du nombre de descendants. Supposons maintenant qu'une mutation apparaisse, qui ne modifie pas le nombre d'enfants mais qui augmente un peu la proportion filles/

garçons du porteur de cette mutation. Ces mutants n'auront pas plus d'enfants que les non-mutants, mais comme ils ont un peu plus de filles et que les filles ont plus d'enfants en moyenne, ils auront plus de petits-enfants. La mutation va donc se répandre dans la population, et la proportion femmes/hommes va augmenter. L'argument fonctionne dans l'autre sens s'il y a plus de femmes que d'hommes. Au bout du compte, la situation va se stabiliser sous l'effet des mutations aléatoires, et le nombre d'hommes sera égal au nombre de femmes.

Bien entendu, cet argument contient beaucoup d'hypothèses implicites qu'il s'agit de préciser. La principale est que la moitié du patrimoine génétique d'un enfant provient de son père et l'autre moitié de sa mère. Mais la science fonctionne ainsi : quelques idées très simples sont émises, qu'il faut ensuite affiner. Même si la plupart des espèces animales ont à peu près autant de mâles que de femelles, ce n'est pas toujours le cas et il faut l'expliquer. Et puis il y a un peu plus d'hommes que de femmes à la naissance (107 hommes pour 100 femmes) et il faut aussi le comprendre. Cela relève de la biologie, des mathématiques, mais aussi de beaucoup d'autres causes, qui peuvent être sociales bien sûr, mais également climatiques. Il semble par exemple qu'il y a (un peu) plus de femmes sous les tropiques que dans les pays du Nord.

Voici la réponse de l'énigme : cette loi stupide ne modifiera en rien la proportion hommes/femmes. Pour s'en convaincre, il ne faut pas comptabiliser par famille mais par naissance. Le sexe d'un bébé qui va naître n'a rien à voir avec ses frères et sœurs. La probabilité que le bébé soit une fille est donc la même que si cette

loi n'était pas en vigueur. Là encore, il y a des hypothèses implicites, comme celle que les sexes des enfants successifs d'une femme sont des variables aléatoires indépendantes, ce qui n'est pas tout à fait vrai.

Une dernière énigme pour mon lecteur. Pensez-vous que l'argument de Fisher est valable pour les espèces animales dans lesquelles un petit nombre de mâles dominants s'accouplent avec la majorité des femelles ? ●

Etienne Ghys, *Le Monde*
daté du 06.12.2017

POURQUOI CET ARTICLE ?

Cet article utilise de nombreux termes faisant référence à la proportionnalité (avec les mots « ratio » ou « proportion »), aux statistiques (avec la notion de nombre moyen), mais surtout aux probabilités. Ce sont les mathématiques appliquées qui sont donc utilisées ici pour tenter de clarifier l'interrogation concernant la répartition hommes/femmes dans le monde. On voit tout au long de cette étude que la notion de variables aléatoires indépendantes est aussi importante que le fait que l'épreuve se répète plusieurs fois de suite dans des circonstances identiques, mais avec toujours la même incertitude quant au sexe de chaque enfant au fil des générations. On est donc ici dans un cadre d'étude proche du schéma de Bernoulli, qui se répète pour former une loi binomiale si on met de nombreuses générations les unes à la suite des autres. C'est d'ailleurs grâce à ce type de procédure que cette étude montre que la proportion entre les hommes et les femmes va se stabiliser après plusieurs générations même si l'on essaie de créer au départ un décalage par une obligation quelconque.

ALGORITHMIQUE/LOGIQUE

 n $\in$ x^2 Σ

Algorithmique/logique

Un algorithme est la décomposition d'une action en instructions élémentaires. L'énoncé en français doit être traduit en langage « machine » pour effectuer un traitement sur une calculatrice ou un ordinateur.

Qu'est-ce qu'un algorithme ?

Un algorithme est une liste d'instructions à suivre pas à pas, qui permettent d'obtenir des résultats à partir de données.
Un algorithme est donc caractérisé par trois blocs : les données, le traitement et les résultats.

Quelles sont les étapes pour écrire un programme informatique ?

Il y a deux étapes principales : analyser le problème posé ; écrire un algorithme en langage Python.

Quelles sont les instructions élémentaires à connaître ?

Il s'agit essentiellement des instructions relatives aux variables : entrées, sorties et affectations.

Les entrées : ces instructions jouent un double rôle ; créer la variable et lui affecter une valeur.

On les note : `print(A)`

Les sorties : ces instructions permettent d'afficher un résultat. On les note : `Afficher(A)` ; `Disp A...`

Les affectations : ces instructions permettent l'attribution d'une valeur (ou d'un texte...) à une variable.

On les note : `A=A+1`

Quels sont les différents types de données ?

Il existe trois principales catégories de données : les nombres (entiers, décimaux, réels) ; les caractères et chaînes de caractères ; les tableaux contenant des nombres, des caractères ou des chaînes de caractères.

Qu'est-ce qu'un itérateur ?

Un itérateur est une variable entière qui permet de pouvoir répéter plusieurs fois la même suite d'instructions, on dit aussi compteur. Pour faire le lien avec les mathématiques, on peut dire que l'itérateur joue le même rôle que l'indice pour les suites.

Qu'est-ce qu'une boucle ?

La répétition de la même suite d'instructions un certain nombre de fois s'appelle une boucle ou une structure itérative. La question importante est « comment arrêter la boucle » ?

En fait, il y a deux méthodes à choisir en fonction du problème : soit on connaît un test d'arrêt, soit on connaît le nombre de fois que doit s'effectuer la répétition.

Lorsque l'on connaît le nombre de répétitions on utilise la boucle : `for ... in range(...,...):`.

Exemple : la répétition 20 fois d'une suite d'instructions s'écrit :

```
for i in range(1,21):
    Suite d'instruction
```

Lorsque l'on connaît un test d'arrêt (*condition*) on peut utiliser la boucle : `while...`. Jusqu'à condition...

La structure alternative : « si...alors...sinon... »

```
if condition:
    suite d'instructions1
else:
    suite d'instructions2
```

UN ARTICLE DU À CONSULTER

• Un nouvel algorithme fait avancer les moutons p. 74
(David Larousserie, *Le Monde* daté du 17.07.2019)

MOTS CLÉS

CONDITION

Lorsqu'une proposition P implique une proposition Q , on dit que :

- P est une **condition suffisante** pour Q s'il suffit que P soit vraie pour que Q le soit ;
- P est une **condition nécessaire** pour Q s'il faut que P soit vraie pour que Q le soit.

IMPLICATION

Dire que la proposition P implique la proposition Q signifie que si P est vraie alors Q est vraie ou que Q est la **conséquence** de P .

PROPRIÉTÉ RÉCIPROQUE

Soit P et Q deux propositions, la **réciprocité de l'implication** $P \Rightarrow Q$ est l'implication $Q \Rightarrow P$.

CONTRAPOSÉE

La contraposée de l'implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $(\text{non } Q) \Rightarrow (\text{non } P)$.

ÉQUIVALENCE

- On dit que deux propositions P et Q sont équivalentes lorsque P **implique** Q et Q **implique** P .
- On dit aussi que Q (respectivement P) est une condition nécessaire

et suffisante pour P (respectivement Q), ou que P est vraie **si et seulement si** Q est vraie.

DISJONCTION DES CAS

Pour démontrer qu'une propriété est vraie pour tout élément d'un ensemble E , on peut démontrer que cette propriété est vraie pour les éléments de sous-ensembles disjoints de E , dont la réunion est E : on a **raisonné par disjonction des cas**.

CONTRE-EXEMPLE

Pour prouver qu'une propriété est fautive, il suffit d'exhiber un seul élément pour lequel cette propriété n'est pas vraie. On dit alors qu'on a démontré que la propriété est fautive en donnant un contre-exemple. Un **contre-exemple** suffit pour prouver qu'un **énoncé** est **faux**.

CONJECTURE

Une conjecture est une propriété suggérée par l'intuition ou par l'observation d'exemples, mais qui n'est pas encore démontrée.

Algorithmique/logique

Sujet 1. Logique. D'après sujet Bac C, Centres étrangers, juin 1992

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par son premier terme u_0 et par la condition : pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
2. Démontrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
3. Démontrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge alors, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 0$.
4. Démontrer que si $u_0^2 + u_0 > 0$, alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.
5. Démontrer que si $u_0^2 + u_0 < 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 < u_n < 0$. Conclure sur la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

LA BONNE MÉTHODE

Cet exercice se trouve dans la partie Logique et algorithmique, il pourrait se trouver dans la partie sur les suites. Les théorèmes en jeu sont classiques, cet exercice demande de la maîtrise dans l'articulation des raisonnements.

1. Le plus simple ici est l'évaluation du signe de $u_{n+1} - u_n$.
2. La suite est récurrente d'ordre 1, la méthode est classique.
3. On procède à un raisonnement par l'absurde en utilisant la définition de la convergence.
4. On utilise un raisonnement par contraposée.
5. La question appelle manifestement un raisonnement par récurrence.

Sujet 2. Algorithmique. D'après divers sujets de Bac

1. Bac S, Liban, juin 2016.

On donne le script suivant en Python :

```
import math
def f(x):
    return 3/(4+6*math.exp(-2*x))
x=0
while f(x)<0.5:
    x=x+0.01
print(x)
```

Que contient la variable x en sortie d'algorithme ?

2. Bac S, Pondichéry, avril 2012.

On donne le script suivant en Python :

```
import random
K=[0]
L=5*K
while len(list(set(L)))<len(L):
    for k in range(5):
        L[k]=random.randint(1,50)
print(L)
```

Parmi les listes suivantes : [1,3 ; 51 ; 21 ; 40 ; 20], [13 ; 11 ; 21 ; 40 ; 20], [13 ; 51 ; 21 ; 40 ; 20], [13 ; 11 ; 21 ; 40 ; 13] et [5 ; 12 ; 46 ; 21 ; 7], quelles sont celles qui peuvent être affichées. Quel est l'objet de ce programme ?

3. Bac S, Antilles-Guyane, juin 2012.

On donne le script suivant en Python :

```
import random
L=[]
for i in range(10):
    C=0
    for K in range(9):
        A=random.randint(1,7)
        if A>5:
            C=C+1
    L.append(C)
print(L)
```

Dans l'expérience aléatoire simulée par l'algorithme précédent, on appelle X la variable aléatoire prenant la valeur contenue dans la variable C . Quelle loi suit la variable X ? Préciser ses paramètres. La variable L est une liste. Que contient cette variable ?

LA BONNE MÉTHODE

1. Il faut absolument lire l'algorithme pas à pas.
2. On introduit une liste K composée du seul élément 0 ; la liste L est la liste obtenue en copiant 5 fois le contenu de K . La fonction `list(set(L))` permet d'éliminer les doublons dans la liste L ; la fonction `len(liste)` donne le nombre d'éléments de la liste `liste`. Il apparaît alors que le test `len(list(set(L)))<len(L)` est positif lorsque la liste L contient au moins deux éléments identiques. On importe la bibliothèque `random`. La méthode `random.randint(a,b)` produit aléatoirement et de façon équiprobable un entier entre l'entier a et l'entier b , y compris ces deux entiers.
3. La méthode `L.append(C)` permet d'ajouter le contenu de la variable C à la liste L .

Un nouvel algorithme fait avancer les moutons

Un logiciel permet de faire se mouvoir des troupes virtuelles de manière réaliste avec très peu de données.

En France, quand on n'a pas de données, on a des idées. C'est ce que vient d'appliquer un doctorant du laboratoire d'informatique de l'Ecole polytechnique, Pierre Ecomier-Nocca, pour animer des troupes d'animaux de façon réaliste. Jusque-là, il fallait pour y parvenir énormément de vidéos de déplacements en appliquant des méthodes d'apprentissage machine. La technique présentée le 1^{er} juillet à la Conférence internationale sur l'animation et les agents sociaux est plus parcimonieuse.

On choisit une photographie d'un troupeau comme point de départ. Puis une seconde comme point d'arrivée, avec éventuellement un nombre différent d'animaux et en provenance d'une autre source. Enfin, on trace sur un paysage virtuel le chemin que la troupe doit prendre, y compris avec des obstacles. Alors, en quelques secondes, la meute se met en branle en les évitant. Le « dessinateur » peut ajouter d'autres images intermédiaires dont la simulation tiendra compte. « *Cela donne plus de libertés créatrices à un artiste* », note M. Ecomier-Nocca, dont la thèse est dirigée par Pooran Memari et Marie-Paule Cani.

La première étape est une analyse des photos de référence, qui transforme les individus en petite ellipse allongée et fournit la densité et la position des animaux. Elle permet aussi de calculer un paramètre,

dit « descripteur », qu'il s'agit de conserver durant la simulation, comme le nombre de voisins en fonction de la distance.

Mouvement naturel

Une seconde étape apparie au mieux les individus présents dans les deux images en les superposant. Outre que l'éventuel animal de tête est identifié, une fonction de déformation qui assure au mieux le passage d'une image à l'autre est calculée. « *Cela définit comme une laisse sur laquelle on va tirer pour passer de la première image à la dernière* », résume le chercheur, qui s'est associé à Julien Pettré à l'Inria de Rennes.

Mais ce n'est pas tout. Ce seul tirage par la laisse forcerait trop les animaux dont le mouvement n'aurait rien de naturel. Les chercheurs recourent donc en plus à des méthodes dites « d'agents autonomes », qui font que chaque individu obéit, pour avancer, à des lois simples comme rester à une certaine distance de son voisin ou garder un cap... La méthode, née à la fin des années 1980, rend bien compte des envolées de nuées d'oiseaux par exemple. Mais si elle est appliquée seule, ce qui est souvent le cas au cinéma, elle donne des animations trop uniformes. Ici, la « laisse », et surtout le descripteur mathématique de contrainte, rendent possible plus de fantaisie. Les animaux peuvent circuler en petits groupes ou bien alignés, ou encore à la queue leu leu. « *Il n'y a que pour les*

configurations rigides, comme une armée en ordre de marche, que ce n'est pas adapté », constate M. Ecomier-Nocca, qui envisage la suite : permettre aux animaux de sauter, comme des kangourous, ou modéliser des configurations plus « fluides », comme les essaims. Mais pour cela il ne serait pas contre plus de données... ●

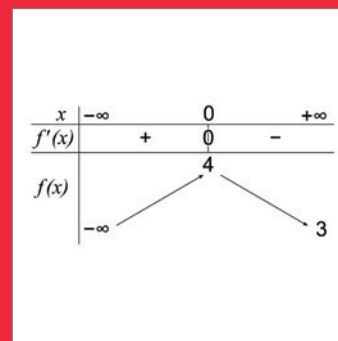
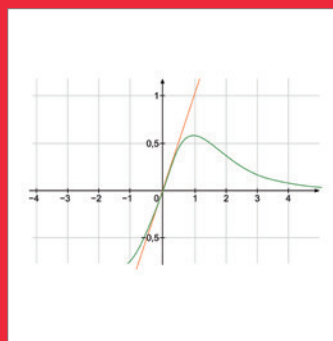
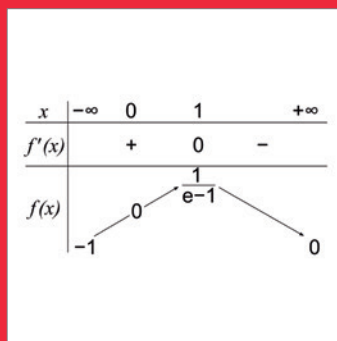
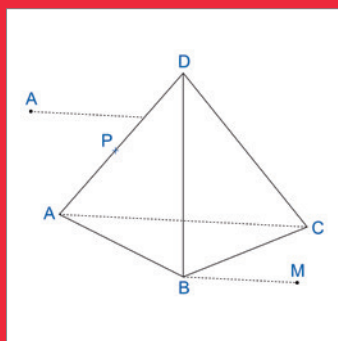
David Larousserie,
Le Monde daté du 17.07.2019

POURQUOI CET ARTICLE ?

L'algorithmique manipule des variables. Lors de l'exécution d'un algorithme, une valeur va être affectée à une variable, puis cette valeur pourra être modifiée un certain nombre de fois. La position d'un mouton est une variable comme une autre, on lui affecte un couple de nombres et ces derniers vont évoluer et ainsi faire avancer le mouton. En fait, la position et le mouvement d'un mouton sont sûrement paramétrés par une très grande quantité de variables.

Une image numérique est composée de pixels, à chaque pixel on attribue une couleur à l'aide, par exemple, du codage RVB (rouge, vert, bleu). Selon la définition de l'image (nombre total de pixels), un mouton est composé de quelques pixels à plusieurs milliers. La rédaction de l'algorithme doit alors être réfléchie afin de ne pas avoir à renseigner les couleurs des pixels une par une, car une vidéo d'une minute est composée d'environ 1 500 images.

CORRIGÉS DES EXERCICES



Combinatoire et dénombrement p. 14

Sujet 1.

1. Nous avons les permutations d'un ensemble à 10 éléments, soit :

$$10! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3\,628\,800.$$

Il y a 3 628 800 positions différentes de chevaux au départ de la course.

2. Nous avons un arrangement de 3 parmi 10, soit :

$$\frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720.$$

Il y a 720 tiercés possibles dans l'ordre.

3. Nous avons une combinaison de 3 parmi 10, soit :

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = 120.$$

Il y a 120 tiercés possibles dans le désordre.

Sujet 2.

1. Le premier ensemble contient 8 éléments. Le deuxième ensemble contient 4 éléments. $8 \times 4 = 32$.

Il y a donc 32 cartes dans le jeu de poker.

2. Chaque carré peut être accompagné d'une carte choisie parmi les 28 autres cartes. Il y a donc 28 mains avec un carré choisi.

Comme il y a 8 hauteurs de carré possibles, on a $28 \times 8 = 224$.

Avec un jeu de 32 cartes, il y a 224 mains contenant un carré.

3. Comptons le nombre de mains contenant un full aux as par les rois (brelan d'as et paire de rois). Il y a 4 brelans d'as et $\binom{4}{2} = 6$ paires

de rois. Il y a donc $4 \times 6 = 24$ mains contenant un full aux as par les rois.

Il y a 8 hauteurs possibles pour le brelan et pour chacune de ces hauteurs, il y a 7 hauteurs possibles pour la paire, soit au total $8 \times 7 = 56$ hauteurs possibles pour le full.

Il y a donc $24 \times 56 = 1\,344$ mains contenant un full.

4. Il y a 4 couleurs. Le nombre de mains contenant 5 cartes d'une couleur choisie est le nombre de parties à 5 éléments d'un

ensemble à 8 éléments, soit $\binom{8}{5} = \frac{8!}{5! \times 3!} = 56$.

On a donc $4 \times 56 = 224$ mains constituées d'une seule couleur.

Manipulation des vecteurs, des droites et des plans de l'espace p. 15

Sujet 1.

1. a. Les points A, B et D ne sont pas alignés donc (ABD) est un plan de l'espace.

b. $\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AD} + \vec{DJ}$

$$\vec{IJ} = -\frac{1}{2}\vec{AE} + \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{DG}$$

$$\vec{IJ} = -\frac{1}{2}\vec{AE} + \vec{AD} + \frac{1}{2}(\vec{DH} + \vec{HG})$$

$$\vec{IJ} = -\frac{1}{2}\vec{AE} + \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{DH} + \frac{1}{2}\vec{HG}$$

$$\vec{IJ} = -\frac{1}{2}\vec{AE} + \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{AB}$$

$$\vec{IJ} = \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB}$$

c. $\vec{IJ}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{AD}$ et $\vec{AB}$, donc la droite (IJ) est parallèle au plan (ABD).

2. a. Le point I est le milieu du segment [AE], donc $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AE}$.

b. $\vec{AK} = \vec{AS} + \vec{SK}$

$$\vec{AK} = \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{SR}$$

$$\vec{AK} = \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{1}{2}(\vec{SA} + \vec{AE} + \vec{ER})$$

$$\vec{AK} = \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\vec{AC} + \vec{AE} + \frac{1}{3}\vec{EH}\right)$$

$$\vec{AK} = \frac{1}{3}\vec{AC} - \frac{1}{6}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AE} + \frac{1}{6}\vec{EH}$$

$$\vec{AK} = \frac{1}{6}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AE} + \frac{1}{6}\vec{AD}$$

$$\vec{AK} = \frac{1}{6}(\vec{AB} + \vec{BC}) + \frac{1}{2}\vec{AE} + \frac{1}{6}\vec{AD}$$

$$\vec{AK} = \frac{1}{6}(\vec{AB} + \vec{AD}) + \frac{1}{2}\vec{AE} + \frac{1}{6}\vec{AD}$$

$$\vec{AK} = \frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{1}{6}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AE} + \frac{1}{6}\vec{AD}$$

$$\vec{AK} = \frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AE}$$

c. $\vec{IK} = \vec{IA} + \vec{AK}$

$$\vec{IK} = -\frac{1}{2}\vec{AE} + \frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AE}$$

$$\vec{IK} = \frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD}$$

3. a. $\vec{IJ} = \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB}$ et $\vec{IK} = \frac{1}{6}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AD}$. Donc $\vec{IJ} = 3\vec{IK}$.

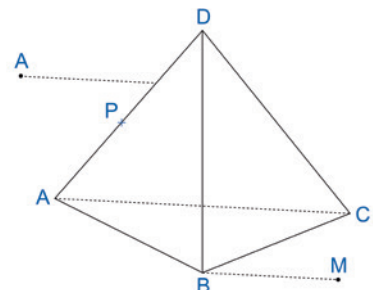
Les vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{IK}$ sont colinéaires, donc les points I, J et K sont alignés.

b. Le point K appartient aux droites (IJ) et (RS), donc les droites (IJ) et (RS) sont sécantes et forment un plan.

Par conséquent, les points I, J, K, R et S sont coplanaires.

Sujet 2.

1.



2. On a $\vec{AM} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$. Le vecteur $\vec{AM}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, avec les points A, B et C non alignés. Donc le point M appartient bien au plan (ABC).

3. $\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AN}$

$$\vec{MN} = -\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{AD} - \frac{1}{2}\vec{AC}$$

$$\vec{MN} = -\vec{AB} - \vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{AD}$$

De même, $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP}$

$$\overrightarrow{MP} = -\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AD}$$

Les coefficients de vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas proportionnels, donc on ne peut pas avoir $\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{MP}$. Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ ne sont donc pas colinéaires et les points M , N et P ne sont pas alignés.

4. (ACD) forme un plan car les points A , C et D ne sont pas alignés.

$\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Donc $\overrightarrow{AN}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AC}$, et le point N appartient au plan (ACD).

Les droites (NC) et (AD) sont donc dans le plan (ACD) : elles sont bien coplanaires.

$$5. \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP}$$

$$\overrightarrow{CP} = -\overrightarrow{AC} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AD}$$

De même, $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN}$

$$\overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{CN} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

Donc $\overrightarrow{CN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CP}$, et le point P appartient à la droite (NC).

Or $\overrightarrow{AP} = \frac{4}{9}\overrightarrow{AD}$. Donc le point P appartient à la droite (AD).

Par conséquent, le point P est le point d'intersection des droites (AD) et (NC).

Orthogonalité et distances dans l'espace p. 16

Sujet 1.

PARTIE A

$$1. \text{ a. } \overrightarrow{HJ} \cdot \overrightarrow{FD} = (\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DJ}) \cdot (\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BD})$$

$$\overrightarrow{HJ} \cdot \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{BD}$$

Or $\overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{FB} = 1$ car les deux vecteurs sont égaux, $\overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ et $\overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{FB} = 0$ car les vecteurs sont orthogonaux.

$$\text{De plus, } \overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{BD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{BD} = -\frac{1}{2}\|\overrightarrow{BD}\|^2$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{2}^2 = -1, \text{ car } J \text{ milieu de } [BD].$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{HJ} \cdot \overrightarrow{FD} = 1 + 0 + 0 - 1 = 0.$$

$$\text{b. } \overrightarrow{HJ} \cdot \overrightarrow{DI} = (\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DJ}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AI})$$

$$\overrightarrow{HJ} \cdot \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{AI}$$

Or $\overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{DA} = 0$ et $\overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{AI} = 0$ car les vecteurs sont orthogonaux, $\overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{HD} \cdot \overrightarrow{HD} = -0,5$ car I milieu de $[AE]$.

$$\text{De plus, on a } \overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{DA} = \|\overrightarrow{DJ}\| \times \|\overrightarrow{DA}\| \times \cos(\overrightarrow{DJ}, \overrightarrow{DA}).$$

$$\overrightarrow{DJ} \cdot \overrightarrow{DA} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 \times \cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,5.$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{HJ} \cdot \overrightarrow{DI} = 0 - 0,5 + 0,5 + 0 = 0.$$

c. Le plan (IDF) admet $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{DI}$ comme vecteurs directeurs. Or $\overrightarrow{HJ} \cdot \overrightarrow{FD} = 0$ et $\overrightarrow{HJ} \cdot \overrightarrow{DI} = 0$, donc $\overrightarrow{HJ}$ est un vecteur normal au plan (IDF). Par conséquent, la droite (HJ) est orthogonale au plan (IDF).

$$2. \text{ a. On a } A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, D \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, E \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, G \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, H \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, I \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix} \text{ et } J \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{b. On a } \overrightarrow{HJ} \begin{pmatrix} 0,5-0 \\ 0,5-1 \\ 0-1 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{HJ} \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{De même, on a } \overrightarrow{FD} \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{FD} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi, on a } \overrightarrow{HJ} \cdot \overrightarrow{FD} = 0,5 \times (-1) - 0,5 \times 1 - 1 \times (-1) = 0.$$

$$\text{c. On a } \overrightarrow{DI} \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-1 \\ 0,5-0 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{DI} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0,5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ainsi, on a } \overrightarrow{HJ} \cdot \overrightarrow{DI} = 0,5 \times 0 - 0,5 \times (-1) - 1 \times 0,5 = 0.$$

d. Le plan (IDF) admet $\overrightarrow{FD}$ et $\overrightarrow{DI}$ comme vecteurs directeurs. Or $\overrightarrow{HJ} \cdot \overrightarrow{FD} = 0$ et $\overrightarrow{HJ} \cdot \overrightarrow{DI} = 0$, donc $\overrightarrow{HJ}$ est un vecteur normal au plan (IDF). Par conséquent, la droite (HJ) est orthogonale au plan (IDF).

PARTIE B

$$1. \text{ ID} = \sqrt{(0-0)^2 + (1-0)^2 + (0-0,5)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{IF} = \sqrt{(1-0)^2 + (0-0)^2 + (1-0,5)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{DF} = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{3}.$$

$$2. \text{ On a } \overrightarrow{ID} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -0,5 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{IF} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}. \text{ Donc}$$

$$\overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{IF} = 0 \times 1 + 1 \times 0 - 0,5 \times 0,5 = -\frac{1}{4}.$$

$$\text{De plus, } \overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{IF} = \|\overrightarrow{ID}\| \times \|\overrightarrow{IF}\| \times \cos(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IF}).$$

$$\overrightarrow{ID} \cdot \overrightarrow{IF} = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \cos(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IF})$$

$$\text{Donc } -\frac{1}{4} = \frac{5}{4} \cos(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IF})$$

$$\text{d'où } \cos(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IF}) = -0,2.$$

$$\text{On a donc } \widehat{DIF} \approx 102^\circ.$$

Sujet 2.

$$1. \text{ a. } \overrightarrow{AC} = \sqrt{(1-(-1))^2 + (1-(-1))^2 + (0-0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{b. } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{AS}\|^2 - \|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AS}\|^2)$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}(\|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{AS}\|^2 - \|\overrightarrow{SC}\|^2)$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}(\sqrt{8}^2 + (3\sqrt{2})^2 - (3\sqrt{2})^2) = 4.$$

$$\text{De plus, } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AS} = \|\overrightarrow{AC}\| \times \|\overrightarrow{AS}\| \times \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS})$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AS} = 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \times \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS}) = 12 \times \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS}).$$

$$\text{Donc } 4 = 12 \times \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS}) \text{ et } \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS}) = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Par conséquent, on a } \widehat{CAS} \approx 71^\circ.$$

$$2. \text{ a. } M \text{ milieu de } [SC], \text{ donc } M \text{ a pour coordonnées } \left(\frac{1+0}{2}; \frac{1+0}{2}; \frac{0+4}{2}\right), \text{ soit } M\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 2\right).$$

$$N \text{ milieu de } [SA], \text{ donc } N \text{ a pour coordonnées } \left(\frac{-1+0}{2}; \frac{-1+0}{2}; \frac{0+4}{2}\right), \text{ soit } N\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 2\right).$$

$$\text{On a } \overrightarrow{AP} \begin{pmatrix} x_p - (-1) \\ y_p - (-1) \\ z_p - 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 - (-1) \\ -1 - (-1) \\ 0 - 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Or } \overrightarrow{AP} \begin{pmatrix} x_p + 1 \\ y_p + 1 \\ z_p \end{pmatrix} = \frac{11}{6} \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x_p + 1 = \frac{11}{6} \times 2 \\ y_p + 1 = \frac{11}{6} \times 0 \\ z_p = \frac{11}{6} \times 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_p = \frac{8}{3} \\ y_p = -1 \\ z_p = 0 \end{cases}.$$

$$\text{D'où } P \left(\frac{8}{3}; -1; 0 \right).$$

$$\text{On a } \overrightarrow{AQ} \begin{pmatrix} x_q - (-1) \\ y_q - (-1) \\ z_q - 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} -1 - (-1) \\ 1 - (-1) \\ 0 - 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Or } \overrightarrow{AQ} \begin{pmatrix} x_q + 1 \\ y_q + 1 \\ z_q \end{pmatrix} = \frac{11}{6} \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \begin{cases} x_q + 1 = \frac{11}{6} \times 0 \\ y_q + 1 = \frac{11}{6} \times 2 \\ z_q = \frac{11}{6} \times 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_q = -1 \\ y_q = \frac{8}{3} \\ z_q = 0 \end{cases}.$$

$$\text{D'où } Q \left(-1; \frac{8}{3}; 0 \right).$$

$$\text{b. On a } \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - (-1) \\ \frac{1}{2} - (-1) \\ 2 - 0 \end{pmatrix}, \text{ soit } \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{On a } \overrightarrow{NP} \begin{pmatrix} \frac{8}{3} - \left(-\frac{1}{2} \right) \\ -1 - \left(-\frac{1}{2} \right) \\ 0 - 2 \end{pmatrix}, \text{ soit } \overrightarrow{NP} \begin{pmatrix} \frac{19}{6} \\ -\frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{NP} = \frac{3}{2} \times \frac{19}{6} + \frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{2} \right) + 2 \times (-2) = 0.$$

$$\text{D'autre part, on a } \overrightarrow{NQ} \begin{pmatrix} -1 - \left(-\frac{1}{2} \right) \\ \frac{8}{3} - \left(-\frac{1}{2} \right) \\ 0 - 2 \end{pmatrix}, \text{ soit } \overrightarrow{NQ} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{19}{6} \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{NQ} = \frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{2} \right) + \frac{3}{2} \times \frac{19}{6} + 2 \times (-2) = 0.$$

c. Le plan (NPQ) admet $\overrightarrow{NP}$ et $\overrightarrow{NQ}$ comme vecteurs directeurs. Or $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{NP} = 0$ et $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{NQ} = 0$, donc $\overrightarrow{AM}$ est un vecteur normal au plan (NPQ).

Par conséquent, la droite (AM) est orthogonale au plan (NPQ).

Représentations paramétriques et équations cartésiennes p. 17

Sujet 1. D'après sujet Bac S, Pondichéry, mai 2018

1. On considère les vecteurs $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$. Ils ne sont pas colinéaires, donc

les points B, C et D ne sont pas alignés : ils déterminent un plan unique (BCD) dont

un repère est $(B; \vec{u}, \vec{v})$, où $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Les quatre points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si $A \in (BCD)$, soit si et seulement si il existe un unique couple de réels $(a; b)$ tel que $\overrightarrow{BA} = a\vec{u} + b\vec{v}$, en d'autres termes, si

et seulement si le système $\begin{cases} -2 = -2a \\ 2 = 2a + 2b \\ 4 = a - b \end{cases}$ d'in-

connues a et b admet une unique solution. De façon évidente, ce système est équivalent

à $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ 4 = a - b \end{cases}$ qui n'admet aucune solution.

Les points A, B, C et D ne sont donc pas coplanaires. Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BD}$ forment une base de l'espace des vecteurs et ABCD est un tétraèdre.

2. La droite (CD) passe par C et est dirigée par tout vecteur non nul et colinéaire à $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$, par exemple $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Un point $M(x; y; z)$

appartient à la droite (CD) si et seulement si $\overrightarrow{CM}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires, soit si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{CM} = t\vec{w}$. L'écriture sous forme d'un système de cette équivalence donne un système d'équations paramétriques de (CD) :

$$\begin{cases} x = t \\ y - 3 = 0 \\ z - 2 = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 3 \\ z = 2 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

3. Soit $M \in (CD)$ il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que M ait pour coordonnées $(t; 3; 2 - t)$.

a. Le vecteur $\overrightarrow{BM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} t - 4 \\ 4 \\ 2 - t \end{pmatrix}$.

Ainsi, $BM^2 = (t - 4)^2 + 4^2 + (2 - t)^2 = 2(t^2 - 6t + 18)$. BM est une distance, elle est positive et donc minimale quand son carré l'est. Donc BM est minimale lorsque $t^2 - 6t + 18$ est minimal. Or, il est bien connu que tout polynôme du second degré de la forme $at^2 + bt + c$ avec $a > 0$ admet un minimum en $t = -\frac{b}{2a}$. Ici, BM est donc minimale pour $t = 3$, soit au point de coordonnées $(3; 3; -1)$. Cette distance minimale vaut $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

b. On a $H(3; 3; -1)$. Le vecteur $\overrightarrow{BH}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$. On sait que

$(\overrightarrow{BH}) \perp (CD)$ si et seulement si $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$. Or $\overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CD} = (-1) \times 4 + 4 \times 0 + (-1) \times (-4) = 0$. Les droites (BH) et (CD) sont orthogonales et même perpendiculaires puisqu'elles se coupent en H.

c. Ce qui précède montre que H est le projeté orthogonal de B sur (CD). Ce projeté

orthogonal correspond, sans surprise, au minimum de la distance du point B à la droite (CD) et fait de [BM] la hauteur issue de B dans le triangle BCD.

$$\text{L'aire du triangle est } \mathcal{A}_{\text{BCD}} = \frac{\text{CD} \times \text{BH}}{2} = \frac{\sqrt{32} \times \sqrt{18}}{2} = \frac{\sqrt{2^6 \times 3^2}}{2} = 12 \text{ cm}^2.$$

4. a. Tout vecteur dit normal au plan (BCD) est non nul et dirige toutes les droites orthogonales au plan. On en déduit que $\vec{n}$ est normal au plan (BCD) dont un repère est $(B; \vec{u}, \vec{v})$ si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à la fois à

$$\vec{u} \text{ et à } \vec{v}. \text{ Or } \vec{n} \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -4 + 2 + 2 = 0$$

$$\text{et } \vec{n} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 + 2 - 2 = 0. \text{ On a donc}$$

$$\begin{cases} \vec{n} \neq \vec{0} \\ \vec{n} \cdot \vec{u} = 0, \text{ donc } \vec{n} \text{ est normal au plan (BCD).} \\ \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases}$$

b. Le point M appartient à (BCD) si et seulement si B = M ou (BM) est une droite du plan (BCD) et à ce titre orthogonale à toutes les droites dirigées par $\vec{n}$.

$$\text{Il en résulte que } M(x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{BM}} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 2(x-4) + 1(y+1) + 2(z-0) = 0 \Leftrightarrow 2x + y + 2z = 7.$$

Une équation cartésienne de (BCD) est $2x + y + 2z = 7$.

c. La droite Δ est orthogonale au plan (BCD). Elle est donc dirigée par $\vec{n}$ et passe par A. Un système d'équations paramétriques de cette droite est donc :

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

d. La droite Δ est orthogonale au plan (BCD) donc elle le coupe en un unique point $I(x_1; y_1; z_1)$.

$$I \in \Delta \text{ donc il existe un unique } \theta \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x_1 = 2 + 2\theta \\ y_1 = 1 + \theta \\ z_1 = 4 + 2\theta \end{cases}$$

$$I \in (\text{BCD}) \text{ donc } 2x_1 + y_1 + 2z_1 = 7.$$

$$\text{On en déduit que } 2(2+2\theta) + (1+\theta) + 2(4+2\theta) = 7 \Leftrightarrow 9\theta + 13 = 7. \text{ Donc } \theta = -\frac{2}{3}. \text{ On en déduit}$$

$$\text{que } \begin{cases} x_1 = 2 - \frac{4}{3} \\ y_1 = 1 - \frac{2}{3} \\ z_1 = 4 - \frac{4}{3} \end{cases} \text{ et donc I a pour coordonnées } \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{8}{3} \right).$$

5. Δ est perpendiculaire au plan (BCD) en I et passe par A. On en déduit que [AI] est la hauteur du tétraèdre ABCD de base BCD. On connaît l'aire du triangle BCD. Il reste à déterminer la longueur AI. Le vecteur $\overrightarrow{\text{AI}}$ a

$$\text{pour coordonnées } \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}. \text{ On en déduit que}$$

$$\text{AI} = \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = 2.$$

$$\text{Enfin, } \mathcal{V}_{\text{ABCD}} = \frac{\text{AI} \times \mathcal{A}_{\text{BCD}}}{3} = 8. \text{ Le volume du tétraèdre est } 8 \text{ cm}^3.$$

Sujet 2. D'après sujet Bac S, Asie, juin 2004

1. L'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $2x - y + 5 = 0$ est un plan dont un vecteur

$$\text{normal est } \vec{n}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ L'ensemble des points}$$

$M(x; y; z)$ tels que $3x + y - z = 0$ est un plan

$$\text{dont un vecteur normal est } \vec{n}_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}. \text{ Les vec-}$$

teurs $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont à l'évidence non colinéaires, donc les deux plans ne sont pas parallèles. Ils sont donc sécants selon une droite. La droite d'intersection est caractérisée par le

$$\text{système } \begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases} \text{ qu'on appelle système}$$

d'équations cartésiennes de la droite. Il apparaît donc que ce système n'admet pas une solution unique mais une infinité de solutions qu'on peut obtenir en observant que x peut prendre n'importe quelle valeur réelle. Posons donc $x = t \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \in \mathbb{R} \\ y = 2x + 5 \\ z = 3x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \in \mathbb{R} \\ y = 2t + 5 \\ z = 5t + 5 \end{cases}$$

On reconnaît la droite passant par $E(0; 5; 5)$

$$\text{et dirigée par } \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2. a. La droite $\mathcal{D}$ est dirigée par le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et passe par $A(1; 5; -1)$. Le plan $\mathcal{P}$

d'équation $5x - 5y + z = 0$ admet le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour vecteur normal. Comme

$\vec{u} \cdot \vec{n} = 5 - 10 + 5 = 0$, $\vec{u} \perp \vec{n}$ et la droite $\mathcal{D}$ est donc parallèle (au sens large) au plan $\mathcal{P}$. Le point $A \notin \mathcal{P}$ puisque $5 \times 1 - 5 \times 5 - 1 \neq 0$. Donc on peut affirmer que le parallélisme est strict.

b. La droite $\mathcal{D}$ est dirigée par $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{D}'$ est dirigée par $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Les deux vecteurs

ne sont pas colinéaires, les droites ne sont donc pas parallèles. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont un point commun si et seulement

$$\text{si le système } \begin{cases} t + 1 = -3s \\ 2t + 5 = 1 + s \\ 5t - 1 = 2 + 2s \end{cases} \text{ d'inconnues}$$

s et t admet une unique solution. Or

$$\begin{cases} t + 1 = -3s \\ 2t + 5 = 1 + s \\ 5t - 1 = 2 + 2s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + 3s = -1 \\ 2t - s = -4 \\ 5t - 2s = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + 3s = -1 \\ 7t - 3s = -1 \\ 2t - s = -4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8t = -2 \\ t + 3s = -1 \\ 2t - s = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{4} \\ s = 1 \\ 2t - s = -9 \neq -4 \end{cases}, \text{ donc le}$$

système n'admet aucune solution. Les deux droites ne possèdent pas de point commun, elles ne sont donc pas sécantes. N'étant ni parallèles ni sécantes, les droites sont non coplanaires.

Suites numériques p. 42

Sujet 1. Suites récurrentes d'ordre 1. D'après sujet Bac S, Amérique du Sud, novembre 1994

1. On procède par récurrence. Soit $(\mathcal{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de propositions de terme général : $u_n \geq 4$.

• Initialisation : $u_0 = 5 \geq 4$. Donc la proposition est vraie au rang 0.

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. La croissance de la fonction $f: x \mapsto \sqrt{x+12}$ sur $[4; +\infty[$ permet d'affirmer que si $u_n \geq 4$ alors $f(u_n) \geq f(4)$. Ainsi, $u_n \geq 4$ entraîne $u_{n+1} \geq 4$ et ceci quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

• Conclusion : En vertu du principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 4$, la suite (u_n) est **minorée**.

En vertu du principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier naturel n , donc $u_n \geq 4$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Méthode 1. a. On peut procéder par récurrence. Soit $(\mathcal{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de propositions de terme général : $u_{n+1} \leq u_n$.

• Initialisation : $u_1 = \sqrt{u_0 + 12} = \sqrt{5 + 12} = \sqrt{17} < 5$. Donc $u_1 \leq u_0$ et la proposition est vraie au rang 0.

• Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}_n$ est vraie. La croissance de la fonction $f: x \mapsto \sqrt{x+12}$ sur $[4; +\infty[$ permet d'affirmer que si $4 \leq u_{n+1} \leq u_n$ alors $f(4) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$. Ainsi, $u_{n+1} \leq u_n$ entraîne $u_{n+2} \leq u_{n+1}$ et ceci quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

• Conclusion : En vertu du principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geq u_n$, la suite (u_n) est **décroissante**.

b. La suite (u_n) est décroissante et minorée notamment par 4 donc elle est convergente et sa limite l est telle que $l \geq 4$. La suite (u_n) est récurrente d'ordre 1. Par définition de la convergence, $\lim u_n = l$ entraîne que $\lim u_{n+1} = l$. Par ailleurs, $\lim u_n = l$ entraîne que $\lim f(u_n) = f(l)$ car la fonction f est **continue** sur $[-12; +\infty[$ donc en $l \in [4; +\infty[$. On en déduit que $\lim u_{n+1} = f(l)$. Or, la suite convergente (u_{n+1}) ne possède qu'une seule limite donc il est nécessaire que $l = f(l)$. L'équation $x = \sqrt{12+x}$ n'a de sens que si $x \geq 0$, elle est équivalente à la conjonction $x \geq 0$ et $\frac{-(x-4)(x+3)}{\sqrt{x+12}+x} = 0$, l'unique solution est $x = 4$.

On en déduit que $\lim u_n = 4$.

Méthode 2. a. On va utiliser l'expression conjuguée de $u_{n+1} - 4$. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - 4 = \frac{\sqrt{u_n + 12} - 4}{\sqrt{u_n + 12} + 4} = \frac{(\sqrt{u_n + 12} - 4)(\sqrt{u_n + 12} + 4)}{\sqrt{u_n + 12} + 4}$$

$$\text{On a donc } u_{n+1} - 4 = \frac{u_n - 4}{\sqrt{u_n + 12} + 4}.$$

Or, $\sqrt{u_n + 12} \geq 0$ donc $\sqrt{u_n + 12} + 4 \geq 4$ et $\frac{1}{\sqrt{u_n + 12} + 4} \leq \frac{1}{4}$. En multipliant chaque

terme de l'inégalité par $u_n - 4 \geq 0$, on obtient

$$u_{n+1} - 4 \leq \frac{u_n - 4}{4}.$$

b. On procède par récurrence. Soit $(\mathcal{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de propositions de terme général :

$$0 \leq u_n - 4 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

• Initialisation : $u_0 - 4 = 5 - 4 = 1$ et

$0 \leq 1 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^0$. Donc la proposition est vraie au rang 0.

• Hérédité : Soit n un entier naturel tel que P_n est vraie. On a $0 \leq u_n - 4 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

D'où $0 \leq u_{n+1} - 4 \leq \frac{1}{4}(u_n - 4) \leq \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$, soit

$$0 \leq u_{n+1} - 4 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}.$$

Donc P_{n+1} est vraie et la

proposition est héréditaire.

En vertu du principe de récurrence, P_n

est vraie pour tout entier naturel n , donc

$$0 \leq u_n - 4 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

c. On sait que si $|q| < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$. On a

$$\text{ainsi } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0, \text{ ce qui entraîne grâce au}$$

théorème des gendarmes que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - 4) = 0$. En d'autres termes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.

Sujet 2. Suite divergente. D'après sujet Bac S, Polynésie, juin 2012

1. On a $u_1 = 3u_0 - 2 \times 0 + 3 = 3$ et $u_3 = 3u_1 - 2 \times 1 + 3 = 10$.

a. On procède par récurrence. Soit $(\mathcal{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de propositions de terme général : $u_n \geq n$.

• Initialisation : $u_0 = 0 \geq 0$. Donc la proposition est vraie au rang 0.

• Hérédité : Soit n un entier naturel tel que P_n est vraie. On a $u_n \geq n$. Or $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 \geq 3n - 2n + 3 \geq n + 1$. Donc P_{n+1} est vraie et la proposition est héréditaire.

En vertu du principe de récurrence, P_n est vraie pour tout entier naturel n , donc $u_n \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2u_n - 2n + 3 = 2(u_n - n) + 3 \geq 3 > 0$, puisque $u_n - n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (u_n) est donc croissante.

c. La suite (u_n) est croissante et non majorée, car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq n$. On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

2. Comme la suite tend vers $+\infty$, par définition, quel que soit le réel A , il existe un entier N tel que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Leftrightarrow u_n \geq A$. Pour $A = 10^p$, il existe au moins un entier n_0 tel que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0 \Leftrightarrow u_n \geq 10^p$.

3. On construit le script Python sous la forme d'une fonction Seuil(p) dont l'argument p est l'entier exposant de 10. Le rang est contenu dans la variable n qui est initialisée à 0 et qui augmente d'une unité tant que le test $u_n \geq 10^p$ n'est pas vérifié. Chaque terme de la suite (u_n) est contenu dans la variable u, celle-ci est initialisée à 0 et se transforme en prenant la valeur donnée par la définition de la suite.

```
def Seuil(p):
    u=0
    n=0
    while u<10**p:
        u=3*u-2*n+3
        n=n+1
    return n
```

Si on fait fonctionner ce script en tapant `print(Seuil(3))`, on lit la réponse 7. L'entier 7 est le premier entier pour lequel $u_n > 1\,000$.

Limites des fonctions p. 43

Sujet 1.

PARTIE A

1. $f(x) = xe^{1-x} = x \times \frac{e}{e^x} = e \times \frac{x}{e^x}$.

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x) = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1-x} = +\infty$, par composition. Puis, par produit, on obtient que $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{1-x} = -\infty$.

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

3. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Par conséquent, la courbe représentant la fonction f admet la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

4. $f(x) = xe^{1-x} = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^{1-x}$. On a $u'(x) = 1$, $v'(x) = -e^{1-x}$ et $f' = u'v + uv'$. Donc $f'(x) = 1 \times e^{1-x} + x \times (-e^{1-x}) = (1-x)e^{1-x}$.

5. $e^{1-x} > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $1-x$.

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	1	0

PARTIE B

1. $(1-x)g_n(x) = (1-x)(1+x+x^2+\dots+x^n)$

$(1-x)g_n(x) = 1+x+x^2+\dots+x^n - x - x^2 - x^3 - \dots - x^{n+1}$

$(1-x)g_n(x) = 1 - x^{n+1}$.

On obtient alors, pour tout réel $x \neq 1$:

$g_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

2. On a $g'_n(x) = 0 + 1 + 2x + \dots + nx^{n-1} = h_n(x)$.

Or $g_n(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 1-x^{n+1}$ et $v(x) = 1-x$. On a $u'(x) = -(n+1)x^n$, $v'(x) = -1$ et $g'_n = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Donc $h_n(x) = g'_n(x) =$

$\frac{-(n+1)x^n \times (1-x) - (1-x^{n+1}) \times (-1)}{(1-x)^2}$

$h_n(x) = \frac{-(n+1)x^n + (n+1)x^{n+1} + 1 - x^{n+1}}{(1-x)^2}$

$h_n(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}$

3. $S_n = 1e^{1-1} + 2e^{1-2} + \dots + ne^{1-n}$

$S_n = 1 + 2e^{-1} + \dots + n(e^{-1})^{n-1} = h_n(e^{-1})$

Or $h_n(e^{-1}) = \frac{n(e^{-1})^{n+1} - (n+1)(e^{-1})^n + 1}{(1-e^{-1})^2}$.

Donc $S_n = \frac{\frac{n}{e^{n+1}} - \frac{n+1}{e^n} + 1}{\left(1 - \frac{1}{e}\right)^2}$.

On a $\frac{n}{e^{n+1}} = \frac{n}{n+1} \times \frac{n+1}{e^{n+1}}$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$ et

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{e^{n+1}} = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{N}{e^N} = 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e^{n+1}} = 0$.

De même, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{e^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{e^n} + \frac{1}{e^n}\right) = 0 + 0 = 0$.

On a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{e}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{e-1}{e}\right)^2} = \frac{e^2}{(e-1)^2}$.

Sujet 2.

PARTIE A

1. La fonction g est dérivable comme somme de fonctions dérivables. On a $g'(x) = e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

Donc la fonction g est décroissante sur $]-\infty; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.

Or $g(0) = 0$, donc $g(x) \geq 0$ pour tout réel x .

2. D'après le 1, pour tout réel x , on a $e^x - x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x - x \geq 1$. Donc pour tout réel x , $e^x - x$ est strictement positif.

PARTIE B

1. a. $f(x) = \frac{x}{e^x - x} = \frac{x}{x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right)} = \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1}$ pour $x \neq 0$.

$\neq 0$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty$ et

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = -1$ et

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$.

b. D'après les résultats précédents, la courbe ($\mathcal{C}$) admet la droite d'équation $y = 0$ comme asymptote horizontale en $+\infty$, et la droite d'équation $y = -1$ comme asymptote horizontale en $-\infty$.

2. a. $f(x) = \frac{x}{e^x - x} = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^x - x$. On a $u'(x) = 1$, $v'(x) = e^x - 1$ et $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Donc $f'(x) = \frac{1 \times (e^x - x) - x \times (e^x - 1)}{(e^x - x)^2}$.

$f'(x) = \frac{e^x - x - xe^x + x}{(e^x - x)^2} = \frac{e^x - xe^x}{(e^x - x)^2}$

Donc $f'(x) = \frac{e^x(1-x)}{(e^x - x)^2}$.

b. Comme e^x et $(e^x - x)^2$ sont strictement positifs, $f'(x)$ est du signe de $(1-x)$. On a donc :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	0	1	0

3. a. La tangente à la courbe ($\mathcal{C}$) au point d'abscisse 0 a pour équation :

$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$, avec $f'(0) = \frac{e^0(1-0)}{(e^0-0)^2} = 1$ et $f(0) = \frac{0}{e^0-0} = 0$.

Donc (T) a pour équation : $y = x$.

b. $f(x) - x = \frac{x}{e^x - x} - x = \frac{x - x(e^x - x)}{e^x - x}$

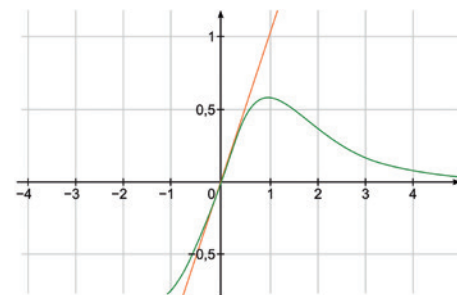
$f(x) - x = \frac{x - xe^x + x^2}{e^x - x} = \frac{-x(-1 + e^x - x)}{e^x - x}$

Donc $f(x) - x = \frac{-x \times g(x)}{e^x - x}$.

Or $g(x)$ et $(e^x - x)$ sont strictement positifs pour tout réel x donc $f(x) - x > 0 \Leftrightarrow -x > 0 \Leftrightarrow x < 0$.

Par conséquent, la courbe ($\mathcal{C}$) est au-dessus de (T) sur $]-\infty; 0[$, en dessous de (T) sur $]0; +\infty[$ (et les courbes sont sécantes au point d'abscisse 0).

4.



Compléments sur la dérivation p. 44

Sujet 1.

1. On a $f(x) = (2x+1)e^{-2x} + 3 = \frac{2x}{e^{2x}} + e^{-2x} + 3$.

On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x) = +\infty$ donc

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^{2x}} = 0$. De plus $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = 0$.

Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 + 0 + 3 = 3$.

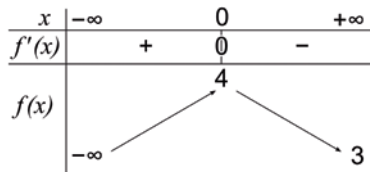
On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x+1) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x} = +\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

2. La fonction f est dérivable comme produit et somme de fonctions dérivables.

$f(x) = (2x+1)e^{-2x} + 3 = u(x) \times v(x) + 3$ avec $u(x) = 2x+1$ et $v(x) = e^{-2x}$. On a $u'(x) = 2$, $v'(x) = -2e^{-2x}$ et $f' = u'v + uv'$.

Donc $f'(x) = 2 \times e^{-2x} + (2x+1) \times (-2e^{-2x}) = -4xe^{-2x}$.

3. Comme $e^{-2x} > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-4x$.



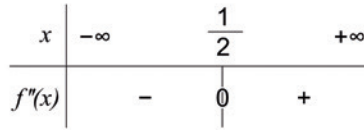
4. La fonction f'' est dérivable comme produit de fonctions dérivables.

$f'(x) = -4xe^{-2x} = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = -4x$ et $v(x) = e^{-2x}$. On a $u'(x) = -4$, $v'(x) = -2e^{-2x}$ et $f'' = u'v + uv'$.

On a donc $f''(x) = -4e^{-2x} - 4x \times (-2e^{-2x}) = e^{-2x}(-4 + 8x)$.

5. a. Comme $e^{-2x} > 0$, $f''(x)$ est du signe de $(-4 + 8x)$.

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow -4 + 8x > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}.$$



b. f'' s'annule en changeant de signe en $x = \frac{1}{2}$, donc la courbe admet un

point d'inflexion d'abscisse $x = \frac{1}{2}$. On a

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(2 \times \frac{1}{2} + 1\right) e^{-2 \times \frac{1}{2}} + 3 = \frac{2}{e} + 3.$$

Le point d'inflexion a pour coordonnées

$$\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{e} + 3\right).$$

c. La fonction f est concave sur l'intervalle

$$\left]-\infty; \frac{1}{2}\right] \text{ et convexe sur l'intervalle } \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[.$$

Sujet 2.

PARTIE A

1. $f(0) = 2$ car $A(0; 2)$. $f(2) = 0$ car $B(2; 0)$.

2. Au point d'abscisse 1, la tangente est horizontale, donc $f'(1) = 0$.

3. Le coefficient directeur est $\frac{y_c - y_A}{x_c - x_A}$

$$= \frac{0 - 2}{-2 - 0} = 1. \text{ L'ordonnée à l'origine est } 2.$$

Donc la tangente à la courbe C_f au point A a pour équation : $y = x + 2$.

4. La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $[-10; 1]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[1; 2]$.

5. Le point A est un point d'inflexion, car la courbe C_f traverse sa tangente au point d'abscisse 0.

La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-10; 0]$ et concave sur l'intervalle $[0; 2]$.

PARTIE B

1. $f(0) = (2-0)e^0 = 2$. $f(2) = (2-2)e^2 = 0$.

2. La fonction f est dérivable comme produit de fonctions dérivables.

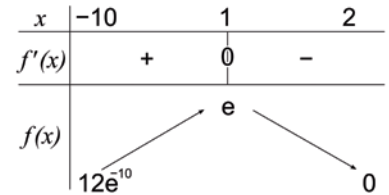
$f(x) = (2-x)e^x = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = 2-x$ et $v(x) = e^x$. On a $u'(x) = -1$, $v'(x) = e^x$ et $f' = u'v + uv'$. Donc $f'(x) = -e^x + (2-x)e^x = e^x(1-x)$.

On a donc $f'(1) = e^1(1-1) = 0$.

3. L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$.

Donc $y = x + 2$.

4. Comme $e^x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $1-x$.



5. La fonction f'' est dérivable comme produit de fonctions dérivables.

$f'(x) = (1-x)e^x = u(x) \times v(x)$ avec $u(x) = 1-x$ et $v(x) = e^x$. On a $u'(x) = -1$, $v'(x) = e^x$ et $f'' = u'v + uv'$.

Donc $f''(x) = -1 \times e^x + (1-x)e^x = -xe^x$.

Comme $e^x > 0$, $f''(x)$ est du signe de $-x$.

Donc la fonction f est convexe sur l'intervalle $[-10; 0]$ et concave sur l'intervalle $[0; 2]$.

Continuité des fonctions d'une variable réelle p. 45

Sujet 1.

PARTIE A

1. La fonction C est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables.

$$C(x) = \frac{e^{0,1x} + 20}{x} = \frac{u(x)}{v(x)}, \text{ avec } u(x) = e^{0,1x} + 20 \text{ et } v(x) = x. \text{ On a } u'(x) = 0,1e^{0,1x}, v'(x) = 1 \text{ et } C' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

On a donc :

$$C'(x) = \frac{0,1e^{0,1x} \times x - (e^{0,1x} + 20) \times 1}{x^2}$$

$$C'(x) = \frac{0,1xe^{0,1x} - e^{0,1x} - 20}{x^2}$$

2. a. La fonction f est dérivable comme produit de fonctions dérivables.

$$f(x) = 0,1xe^{0,1x} - e^{0,1x} - 20 = u(x) \times v(x) - e^{0,1x} - 20, \text{ avec } u(x) = 0,1x \text{ et } v(x) = e^{0,1x}. \text{ On a } u'(x) = 0,1, v'(x) = 0,1e^{0,1x} \text{ et } f'(x) = (u'v + uv') - e^{0,1x}.$$

On a donc :

$$f'(x) = 0,1e^{0,1x} + 0,1x \times 0,1e^{0,1x} - 0,1e^{0,1x}$$

$$f'(x) = 0,1xe^{0,1x}$$

Pour tout $x \in]0; 60[$, $0,01x > 0$ et $e^{0,1x} > 0$.

Donc $f'(x) > 0$ sur $]5; 60[$. Et la fonction f est strictement croissante sur $]5; 60[$.

b. La fonction f est définie continue (car dérivable) strictement croissante sur $]5; 60[$.

$f(5) \approx -21$ et $f(60) \approx 1997$. Donc $f(25) < 0 < f(60)$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]5; 60[$.

c. En utilisant la calculatrice, on obtient $f(25) \approx -1,7$ et $f(26) \approx 1,5$. Donc $25 < \alpha < 26$.

d. Comme la fonction f est strictement croissante et que $f(\alpha) = 0$, on a :

x	5	α	60
signe de $f(x)$	-	0	+

3. $C'(x) = \frac{0,1x e^{0,1x} - e^{0,1x} - 20}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}$. Donc

$C'(x)$ est du signe de $f(x)$.

x	5	α	60
signe de $C'(x)$	-	0	+
variations de C	$C(5)$	$C(\alpha)$	$C(60)$

On a $C(5) \approx 4,33$, $C(\alpha) \approx 1,29$ et $C(60) \approx 7,06$.

4. a. La fonction C est définie continue (car dérivable) strictement décroissante sur $[5; \alpha]$. Or $C(5) > 2 > C(\alpha)$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $C(x) = 2$ admet une unique solution sur $[5; \alpha]$.

De même, la fonction C est définie continue (car dérivable) strictement croissante sur $[\alpha; 60]$.

Or $C(\alpha) < 2 < C(60)$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $C(x) = 2$ admet une unique solution sur $[\alpha; 60]$.

Par conséquent, l'équation $C(x) = 2$ admet deux solutions sur $[5; \alpha]$.

b. La fonction C est définie continue (car dérivable) strictement décroissante sur $[5; \alpha]$. Donc elle admet un maximum en 5 égal à $C(5) < 5$. Donc l'équation $C(x) = 5$ n'admet aucune solution sur $[5; \alpha]$.

La fonction C est définie continue (car dérivable) strictement croissante sur $[\alpha; 60]$.

Or $C(\alpha) < 5 < C(60)$. Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $C(x) = 5$ admet une unique solution sur $[\alpha; 60]$.

Par conséquent, l'équation $C(x) = 5$ admet une unique solution sur $[5; 60]$.

PARTIE B

La fonction C admet un minimum en α , avec $25 < \alpha < 26$.

Or $C(25) \approx 1,2873$ et $C(26) \approx 1,2871$. Donc le coût moyen minimal sera atteint pour une production de 26 vélos.

Sujet 2.

1. La fonction $x \mapsto -\frac{4}{x+2}$ est une fonction rationnelle, donc continue et dérivable sur chacun des intervalles de son domaine de définition, $]-\infty; -2[$ et $]-2; +\infty[$. Elle est donc continue et dérivable sur $]0; +\infty[$.

Par somme, la fonction f est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$.

2. $f'(x) = -\frac{4 \times 1}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2} > 0$. Donc la fonction f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

3. Pour $x \in]0; +\infty[$,

$$f(x) = x \Leftrightarrow 5 - \frac{4}{x+2} = x \Leftrightarrow 5 - x - \frac{4}{x+2} = 0$$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{(5-x)(x+2) - 4}{x+2} = 0$$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{5x + 10 - x^2 - 2x - 4}{x+2} = 0$$

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 3x + 6}{x+2} = 0$$

$$f(x) = x \Leftrightarrow -x^2 + 3x + 6 = 0 \text{ et } x \neq -2$$

On se ramène à une équation du second degré avec $\Delta = 3^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 33 > 0$. On a donc deux solutions réelles distinctes

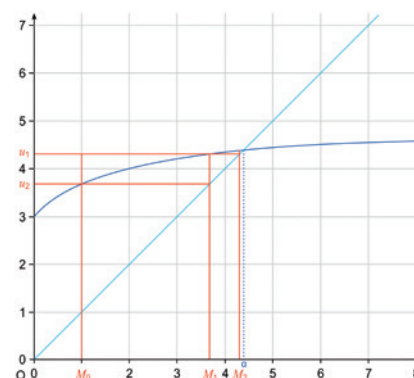
$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{33}}{-2} = \frac{3 + \sqrt{33}}{2} \approx 4,37 \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-3 + \sqrt{33}}{-2} = \frac{3 - \sqrt{33}}{2} \approx -1,37. \text{ On ne garde}$$

que la solution positive car f est définie

$$\text{sur }]0; +\infty[. \text{ Donc } \alpha = \frac{3 + \sqrt{33}}{2} \approx 4,37$$

4.



On peut conjecturer que la suite (u_n) converge vers α .

5. a. Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition définie, pour tout entier naturel n , par : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.

Initialisation : On a $u_0 = 1$,

$$u_1 = f(u_0) = f(1) = 5 - \frac{4}{1+2} = \frac{11}{3}. \text{ On a donc bien}$$

$0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \alpha$. Et la proposition est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

On sait (par hypothèse de récurrence) que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$. Or f est strictement croissante, donc $f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(\alpha)$.

D'où $3 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$ car $f(\alpha) = \alpha$. Par conséquent, $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n .

b. D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante et majorée par α , donc elle est convergente. On note sa limite l .

Comme f est continue et comme $u_{n+1} = f(u_n)$, la limite l vérifie $f(l) = l$.

D'après la question 3, on en déduit que $l = \alpha$. Donc la suite (u_n) converge vers α .

Fonction logarithme p. 46

Sujet 1. D'après sujet Bac S, Centres étrangers, juin 2008

PARTIE I

1. Pour $x > 0$, $x \neq 1$ (ce qui est le cas au voisinage de $+\infty$), on a :

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{1}{\frac{x}{\ln x}} = \frac{1}{e^{\ln x}}. \text{ Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty, \text{ donc}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\ln x}}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$. Par composition avec la fonction inverse, on obtient donc que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

2. Le résultat vient d'être établi pour $n = 1$.

Quel que soit $n \geq 2$, on a $\frac{\ln x}{x^n} = \frac{1}{x^{n-1}} \times \frac{\ln x}{x}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = 0$, on a

bien, par produit de limites, le résultat demandé.

PARTIE II

1. a. La fonction u est clairement dérivable sur $]0; +\infty[$, et pour tout $x > 0$, $u'(x) = 3x^2 + \frac{2}{x} > 0$ comme somme de deux

quantités strictement positives. On en déduit que u est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

b. On a $u(1) = 0$ et u strictement croissante. On en déduit le tableau suivant :

x	0	1	$+\infty$
u		0	

Donc $u(x)$ est négatif sur $]0; 1[$, positif sur $]1; +\infty[$.

2. a. On a $f(x) = x - \frac{1}{x^2} \ln x$.

S'agissant de la limite en 0, on sait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x^2} = -\infty$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$. (La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f .)

S'agissant de la limite en $+\infty$, la partie I nous permet d'affirmer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$. On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b. La fonction f est à l'évidence dérivable sur $]0; +\infty[$, et pour tout $x > 0$, on a :

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x^2} \times x^2 - (\ln x) \times 2x}{x^4} = 1 - \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

$= \frac{u(x)}{x^3}$. Le signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$ est clairement celui de $u(x)$. On peut construire le tableau des variations de f .

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$

3. a. Quel que soit $x > 0$, $f(x) - x = -\frac{\ln x}{x^2}$. On a vu que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$, donc ce qui suffit pour prouver que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

b. Sur $]0; +\infty[$, le signe de $f(x) - x$ est l'opposé de celui de $\frac{\ln x}{x^2}$, donc l'opposé de celui de $\ln x$. On en déduit que la courbe représentative de f coupe son asymptote au point de coordonnées $(1; 1)$ et est située :

- au-dessus de son asymptote sur $]0; 1[$;
- en dessous de son asymptote sur $]1; +\infty[$.

Sujet 2. D'après sujet Bac S, Antilles-Guyane, septembre 2007

1. On ne peut calculer l'image par la fonction $\ln$ que de réels strictement positifs. Ainsi, il est possible de calculer $f(x)$ si et seulement si $\frac{2+x}{2-x}$ existe et est strictement positif, soit si et seulement si $x \neq 2$ et $(2+x)(2-x) > 0$, soit si et seulement si $x \in]-2; 2[$.

2. Soit $u : x \mapsto \frac{2+x}{2-x}$.

• $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2+x}{2-x} = \frac{0^+}{4} = 0^+$ (la fonction rationnelle u est continue en tout réel de son ensemble de définition donc en $x_0 = -2$), et Donc, par composition des limites, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$.

(La courbe représentative de la fonction f admet la droite d'équation $x = -2$ pour asymptote.)

• On a $u(x) = -(2+x) \times \frac{1}{x-2}$. Il est clair que $\lim_{x \rightarrow 2^-} (-(2+x)) = -4$ et que $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$.

On en déduit par produit de limites que $\lim_{x \rightarrow 2^-} u(x) = +\infty$. Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$. On en déduit par composition des limites que (La courbe représentative de la fonction f admet la droite d'équation $x = 2$ pour asymptote.)

3. La fonction u est rationnelle donc dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ donc en particulier sur $] -2; 2[$. Lorsque $x \in] -2; 2[$, la fonction u est à valeurs dans $]0; +\infty[$, intervalle sur lequel la fonction $\ln$ est dérivable. On en déduit que f est dérivable sur $] -2; 2[$.

Pour tout $x \in] -2; 2[$,

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{\frac{4}{(2-x)^2}}{\frac{2+x}{2-x}} = \frac{4}{4-x^2} > 0. \text{ On en } \dots$$

déduit que f est strictement croissante sur $] -2; 2[$.

4. On dresse le tableau de variation de f :

x	-2	2
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

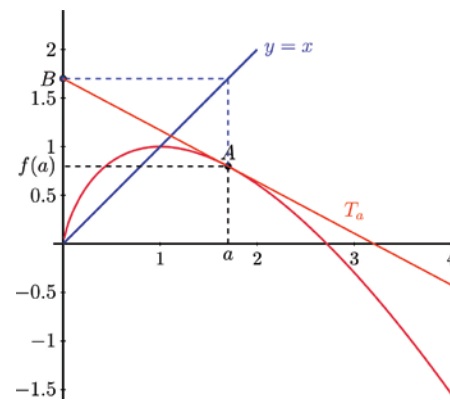
Sujet 3. D'après sujet Bac S, Métropole, septembre 2010

1. L'équation réduite de (T_a) est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit de fonctions qui le sont, et pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$f'(x) = 1 \times (1 - \ln x) + x - \frac{1}{x} = -\ln x. \text{ Ainsi,}$$

l'équation réduite de la tangente au point d'abscisse a est $y = -(\ln a)(x-a) + a(1 - \ln a)$, soit $y = -x \ln a + a$.

2. La droite (T_a) passe par le point A et le point B(0; a). Pour construire B, il suffit de placer a sur l'axe des ordonnées, par exemple à l'aide de la droite d'équation $y = x$. Les points A et B étant placés, il suffit de tracer (T_a) .



Fonctions trigonométriques p. 47

Sujet 1. Étude d'une fonction.

1. $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos(-\pi) - 2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

2. $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$ tandis que La fonction f n'est donc ni paire ni impaire.

3. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \cos(2(x+2\pi)) - 2\sin(x+2\pi) \\ &= \cos(2x+4\pi) - 2\sin(x+2\pi) \\ &= \cos(2x) - 2\sin x = f(x). \end{aligned}$$

La fonction f est bien périodique de période 2π . On a vu que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{2} + \pi\right) \neq f\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, ce qui prouve que la fonction f n'est pas périodique de période π .

4. La dérivabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est claire, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = 2(-\sin(2x)) - 2\cos x = -4\sin x \cos x - 2\cos x = -2(\cos x)(1 + 2\sin x).$$

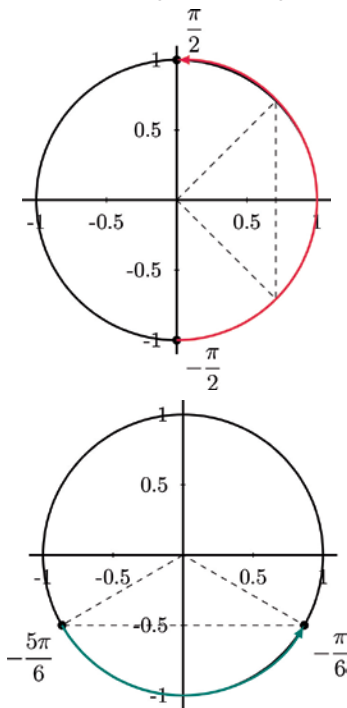
5. On se place sur $[-\pi; \pi]$.

$$-2\cos x < 0 \Leftrightarrow \cos x > 0 \Leftrightarrow x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[,$$

$$\text{et } \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2} ;$$

$$\bullet 1 + 2\sin x < 0 \Leftrightarrow \sin x < -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left] -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6} \right[$$

$$\text{et } \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{6} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6}.$$

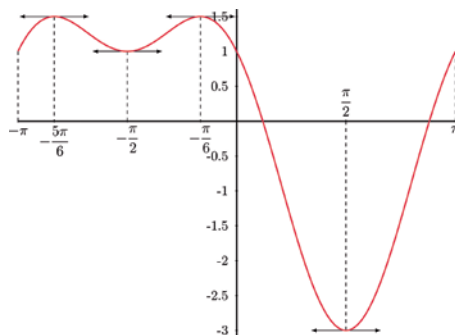


On en déduit le tableau de signes de $f'(x)$, puis le tableau de variation de f sur $[-\pi; \pi]$:

x	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	π	
$-2\cos x$		+	0	-	0	+	
$1+2\sin x$	+	0	-	0	+		
$f'(x)$	+	0	-	0	-	0	+

x	$-\pi$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	-3	1

Enfin, la courbe représentative de f sur $[-\pi; \pi]$:



Sujet 2. Étude de fonction

1. On sait que $\cos(\theta - \theta') = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x + \sin x) = \cos x + \sin x.$$

2. La dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ est claire et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = -e^{-x}(1 - \cos x) + e^{-x}(-(-\sin x))$$

$$= e^{-x}(\cos x + \sin x - 1). \text{ Avec la question précédente, on en déduit que quel que soit } x \in]0; 1[$$

$$x \in [0; 2\pi] \quad f'(x) = \sqrt{2}e^{-x} \left(\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

3. Il apparaît clairement que le signe de $f'(x)$ est celui de

$$\text{Si } x \in [0; 2\pi], \text{ alors } x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right].$$

L'examen du cercle trigonométrique indique que :

$$\bullet \text{ sur } [0; 2\pi], f'(x) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ ou}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} [2\pi], \text{ ce qui revient à dire que } x = 0$$

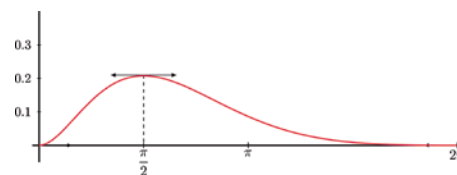
$$\text{ou } x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = 2\pi.$$

$$\bullet \text{ sur } [0; 2\pi], f'(x) > 0 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} \in \left]-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right[$$

$$\text{soit } x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[.$$

On en déduit le tableau des variations de f sur $[0; 2\pi]$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$	2π		
$f'(x)$	0	+	0	-	0
$f(x)$	0	$e^{-\frac{\pi}{2}}$	0		



Primitives, équations différentielles p. 48

Sujet 1. Équations différentielles. D'après sujet Bac S, Amérique du Sud, novembre 2007

1. L'ensemble S_0 des solutions de l'équation (E_0) est l'ensemble des fonctions ϕ_k définies sur $\mathbb{R}$ par $\phi_k(x) = ke^{2x}$, où k décrit $\mathbb{R}$.

2. a. u est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) = a\cos x - b\sin x$. La fonction u est solution de (E_1) si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u'(x) - 2u(x) = \sin x + \cos x$, c'est-à-dire $(-b - 2a)\sin x + (a - 2b)\cos x = \sin x + \cos x$. En particulier, pour $x = 0$, ce qui donne $a - 2b = 1$; pour $x = \frac{\pi}{2}$, ce qui donne $-b - 2a = 1$. Il suffit alors de résoudre le système $\begin{cases} a - 2b = 1 \\ -b - 2a = 1 \end{cases}$.

$$\text{On obtient ainsi } a = -\frac{1}{5} \text{ et } b = -\frac{3}{5}.$$

b. La fonction $u + v$ est solution de (E_1)

si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(u + v)'(x) - 2(u + v)(x) = \sin x + \cos x,$$

si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$v'(x) + u'(x) - 2v(x) - 2u(x) = \sin x + \cos x,$$

si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(v' - 2v)(x) = -(u' - 2u)(x) + \sin x + \cos x.$$

Or u est solution de (E_1) donc

$$u'(x) - 2u(x) = \sin x + \cos x. \text{ Par conséquent,}$$

$u + v$ est solution de (E_1) si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(v' - 2v)(x) = 0$ ce qui équivaut à v solution de (E_0) .

c. Notons S_1 l'ensemble des solutions de (E_1) .

On vient de montrer que $f \in S_1$ si et seulement si $f - u \in S_0$. Ainsi, $f \in S_1$ si et seulement si, il existe $k \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(f - u)(x) = ke^{2x}$$

$$f(x) = ke^{2x} - \frac{\sin x + 3\cos x}{5}.$$

On a donc

$$S_1 = \left\{ x \mapsto ke^{2x} - \frac{\sin x + 3\cos x}{5}, k \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Parmi les fonctions de S_1 , il en existe une seule, notons la g , qui s'annule en 0. On a

$$g(0) = ke^0 - \frac{\sin 0 + 3\cos 0}{5} = k - \frac{3}{5} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{3}{5}.$$

L'unique élément de S_1 cherché est donc la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \frac{3e^{2x} - \sin x - 3\cos x}{5}.$$

Sujet 2. Primitives. D'après sujet Bac S, Centres étrangers, juin 2000

1. La fonction $x \mapsto e^{2x} \ln x$ est clairement dérivable sur $]0; +\infty[$ et à valeurs dans $]0; +\infty[$, intervalle sur lequel la fonction logarithme népérien est dérivable. On en déduit que $x \mapsto \ln(e^{2x} \ln x)$ est dérivable sur $]0; +\infty[$. Par

ailleurs, la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0; +\infty[$. Ainsi, par produit de deux fonctions dérivables sur le même intervalle, f est dérivable sur cet intervalle. Pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$f'(x) = -e^{-x} \ln(e^{2x}-1) + e^{-x} \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1} \\ = -f(x) + \frac{2e^x}{e^{2x}-1}. \text{ On a donc pour tout } x \in]0; +\infty[, f'(x) + f(x) = \frac{2e^x}{e^{2x}-1}.$$

2. Quel que soit $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{e^x}{e^x-1} - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x-1)}{(e^x-1)(e^x+1)} = \frac{2e^x}{e^{2x}-1}.$$

3. On note F une primitive quelconque de f . Il est clair qu'une primitive de f' est f . Une primitive de $x \mapsto \frac{e^x}{e^{2x}-1}$ est $x \mapsto \ln|e^x-1|$.

En primitivant l'équation différentielle du 1., on obtient que pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$f(x) + F(x) = \ln(e^x-1) - \ln(e^x+1) = \ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right).$$

$$\text{On a donc } F(x) = -e^{-x} \ln(e^{2x}-1) + \ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right).$$

L'ensemble des primitives de f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ est l'ensemble des fonctions F_k définies sur $]0; +\infty[$ par $F_k(x) = F(x) + k$, où k décrit $\mathbb{R}$.

Sujet 3. Équations différentielles. D'après sujet Bac S, Métropole, septembre 2007

1. L'ensemble des fonctions solution de l'équation différentielle $y' + y = 1$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto Ke^{-x} + 1$, $k \in \mathbb{R}$.

2. Quel que soit $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$,

$$f(x) = g'(x)\cos x - g(x)\sin x.$$

Donc, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

$$f'(x) + (1 + \tan x)f(x) = g'(x)\cos x - g(x)\sin x$$

$$+ g(x)\cos x + g(x)\frac{\cos x \sin x}{\cos x}.$$

$$= (g'(x) + g(x))\cos x$$

Ainsi, la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si

$$f'(x) + (1 + \tan x)f(x) - \cos x$$

$$\Leftrightarrow (g'(x) + g(x) - 1)\cos x = 0.$$

Or $\cos x \neq 0$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Donc f est

solution de (E) si et seulement si pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $g'(x) + g(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow g'(x) + g(x) = 1$, si et seulement si g est solution de (E₀).

3. On connaît la forme générale des solutions de (E) : ce sont les fonctions définies sur

$\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ par $x \mapsto (Ke^{-x} + 1)\cos x$, $k \in \mathbb{R}$. Donc

il existe $k \in \mathbb{R}$, tel que $f(x) = (Ke^{-x} + 1)\cos x$. Or $f(0) = (Ke^0 + 1)\cos 0 = 0 \Leftrightarrow K + 1 = 0 \Leftrightarrow K = -1$. Donc f est la fonction définie par $f(x) = (1 - e^{-x})\cos x$.

Calcul intégral p. 49

Sujet 1. Sujet Bac S La Réunion juin 2005.

1. La tangente à la courbe représentative de la fonction f à l'origine du repère a pour équation réduite $y = f'(0)(x-0) + f(0)$, soit $y = x$ puisque $f'(x) = \frac{1}{x+1}$ et $f(0) = 0$. De même,

la tangente à la courbe représentative de la fonction g à l'origine du repère a également pour équation réduite $y = x$ puisque $g'(x) = e^x$ et $g(0) = 0$.

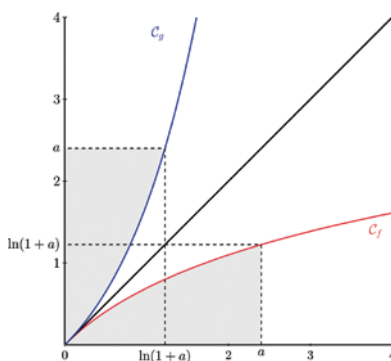
La fonction f est deux fois dérivable et $f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$ sur $] -1; +\infty[$. La fonction f est donc concave et par conséquent, sa courbe est située en dessous de toutes ses tangentes. S'agissant de la fonction g , elle est convexe puisque $g''(x) = e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$. La courbe représentative de g est donc située au-dessus de ses tangentes.

2. Soit $M(x; \ln(x+1))$ un point de C_f . Déterminons l'ordonnée du point N de C_g dont l'abscisse est $\ln(x+1)$. On a $g(\ln(x+1)) = e^{\ln(x+1)} - 1 = x + 1 - 1 = x$. Donc le point N a pour coordonnées $(\ln(x+1); x)$. Il est donc symétrique du point M par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Réciproquement, tout point $N'(x; e^x - 1)$ de C_g a son symétrique le point $M'(e^x - 1; x)$ sur C_f . Par conséquent, les courbes C_f et C_g sont bien symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

3. a. Soit $a > 0$. Soit $\mathcal{D}_a$ le domaine plan fermé délimité par l'axe des abscisses, la droite C_f et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$. Son aire est donnée par $I(a) = \int_0^a f(x) dx$.

Un dessin vaut mieux qu'un long discours :



Les courbes C_f et C_g étant symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$, les deux aires en gris sont égales et valent $I(a)$.

Le domaine grisé au-dessus de la courbe bleue est inclus dans un rectangle, son aire s'exprime donc aussi de la façon suivante :

$$I(a) = a \times \ln(a+1) - \int_0^{\ln(a+1)} g(x) dx \\ = a \ln(a+1) - \int_0^{\ln(a+1)} (e^x - 1) dx.$$

b. Une primitive de la fonction g sur $\mathbb{R}$ est la fonction G définie par $G(x) = e^x - x$. On en déduit que $\int_0^{\ln(a+1)} g(x) dx = [e^x - x]_0^{\ln(a+1)}$

$$= (a+1) - \ln(a+1) - 1 = a - \ln(a+1).$$

$$\text{On a donc } I(a) = a \ln(a+1) - (a - \ln(a+1)) :$$

$$= (a+1) \ln(a+1) - a.$$

c. Pour tout $x \geq 0$, on pose $\begin{cases} u(x) = \ln(x+1) \\ v'(x) = 1 \end{cases}$.

$$\text{On a alors } \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x+1} \\ v(x) = x \end{cases}$$

La formule d'intégration par parties permet d'écrire que

$$I(a) = \int_0^a \ln(x+1) \times 1 dx \\ = [x \ln(x+1)]_0^a - \int_0^a \frac{x}{x+1} dx.$$

$$\text{Donc } I(a) = a \ln(a+1) - \int_0^a \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx \\ = a \ln(a+1) - [x - \ln(x+1)]_0^a.$$

$$\text{D'où } I(a) = a \ln(a+1) - a + \ln(a+1)$$

$$= (a+1) \ln(a+1) - a.$$

Sujet 2.

1. La fonction logarithme népérien est concave sur $]0; +\infty[$. En effet, elle est deux fois dérivable et sa dérivée seconde, $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$, est négative sur $]0; +\infty[$. On en déduit que la courbe représentative de la fonction $\ln$ est située au-dessus de chacune de ses cordes.

2. a. La hauteur du trapèze vaut $k+1-k=1$, la petite base vaut $\ln k$ et la grande base vaut $\ln(k+1)$. Donc on a

$$\theta_k = \frac{\ln(k+1) + \ln k}{2} \times 1 = \frac{\ln(k+1) + \ln k}{2}.$$

On a $\theta_1 = \frac{\ln 2}{2}$.

b. On a $\sum_{k=1}^n \theta_k = \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k+1) + \ln k}{2}$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\ln(k+1)}{2} + \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{2}.$$

$$\text{Donc } \theta_k = \sum_{K=2}^{n+1} \frac{\ln K}{2} + \frac{\ln 1}{2} + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{\ln k}{2} - \frac{\ln(n+1)}{2}.$$

$$\text{D'où } \theta_k = \sum_{k=1}^{n+1} \ln k - \frac{\ln(n+1)}{2}.$$

3. a. La fonction L définie sur $]0; +\infty[$ par $L(x) = x \ln x - x$ est dérivable sur $]0; +\infty[$, et pour tout $x > 0$, $L'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$.

Ce qui prouve que L est une primitive de la fonction logarithme népérien sur $]0; +\infty[$.

Il est classique d'obtenir L en effectuant une intégration par parties en considérant que $\ln x = 1 \times \ln x$, en posant donc $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = 1$.

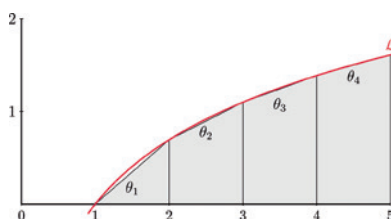
$$\text{b. } \int_1^n \ln x \, dx = \left[x \ln x - x \right]_1^n = n \ln n - n - (1 \ln 1 - 1) = n \ln n - n + 1.$$

D'autre part,

$$\ln \left(\frac{n}{e} \right)^n + 1 = n \ln \frac{n}{e} + 1 = n \ln n - n \ln e + 1$$

$$= n \ln n - n + 1. \text{ On a donc bien } \mathcal{A}_n = \ln \left(\frac{n}{e} \right)^n + 1.$$

4. La courbe $\mathcal{C}$ étant située au-dessus de ses cordes et les trapèzes étant construits à partir des cordes, on a bien comme le montre le dessin suivant :



On a donc pour $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^n \ln k - \frac{\ln n}{2} \leq \ln \left(\frac{n}{e} \right)^n + 1.$$

$$\text{Or } \sum_{k=1}^n \ln k = \ln \left(\prod_{k=1}^n k \right) = \ln n!$$

On en déduit que

$$\ln(n!) \leq \ln \left(\frac{n}{e} \right)^n + \ln e + \ln \sqrt{n}.$$

$$\text{D'où } \ln(n!) \leq \ln \left(\left(\frac{n}{e} \right)^n \times e \times \sqrt{n} \right).$$

Comme la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ on obtient $n! \leq e \sqrt{n} \left(\frac{n}{e} \right)^n$.

Le résultat reste valable pour $n = 1$, car $1! = 1$

$$\text{et } e \sqrt{1} \left(\frac{1}{e} \right)^1 = \frac{e}{e} = 1.$$

Le résultat de Stirling est bien plus précis.

$$\text{Il indique que } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n!}{\sqrt{2n\pi} \left(\frac{n}{e} \right)^n} \right) = 1.$$

Succession d'épreuves indépendantes, schéma de Bernoulli p. 68

Sujet. D'après sujet Bac S, Polynésie, septembre 2010

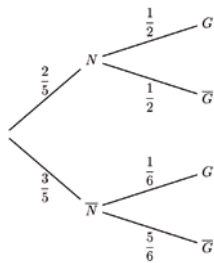
1. a. L'énoncé indique clairement qu'on peut supposer l'équiprobabilité des événements élémentaires. Le tirage des 4 boules s'effectue sans remise, l'univers Ω est l'ensemble des sous-ensembles à 4 éléments pris parmi 10,

ainsi, $\text{Card}(\Omega) = \binom{10}{4} = 210$. L'événement N est réalisé lorsque l'on tire la boule noire et 3 boules blanches parmi les 9, ainsi

$$\text{Card}(N) = \binom{1}{1} \binom{9}{3} = 84.$$

$$\text{On a donc } P(N) = \frac{84}{210} = \frac{2}{5}.$$

b. On construit un arbre de probabilités :



L'événement G est l'union des événements disjoints $G \cap N$ et $G \cap \bar{N}$. On a donc

$P(G) = P(G \cap N) + P(G \cap \bar{N})$, soit avec la formule des probabilités totales :

$$P(G) = P_N(G) \times P(N) + P_{\bar{N}}(G) \times P(\bar{N}) \\ = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}.$$

c. L'énoncé demande clairement $P_{\bar{G}}(N)$. $\bar{G}$ étant un événement de probabilité non nulle, la formule des probabilités composées donne

$$P_{\bar{G}}(N) = \frac{P(N \cap \bar{G})}{P(\bar{G})} = \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{3}{10}} = \frac{2}{7}.$$

2. a. La variable X prend ses valeurs dans $X(\Omega) = \{4 - m, 0, -m\}$.

• $(X = 4 - m)$ est l'événement « Le joueur a gagné », on a donc $P(X = 4 - m) = P(G) = \frac{3}{10}$.

• $(X = 0)$ est l'événement « Le joueur n'a pas gagné mais a tiré la boule noire », on a donc $P(X = 0) = P(N \cap \bar{G}) = \frac{1}{5}$.

• $(X = -m)$ est l'événement « Le joueur n'a pas gagné et n'a pas tiré la boule noire », on a donc $P(X = -m) = P(\bar{N} \cap \bar{G}) = \frac{1}{6}$.

b. $E(X) = (4 - m)(X = 4 - m) + 0 \times P(X = 0) + (-m)P(X = -m)$.

$$\text{Ainsi, } E(X) = \frac{3(4 - m)}{10} + \frac{-m}{6} = \frac{6 - 4m}{5}.$$

$$\text{c. } E(X) = 0 \Leftrightarrow \frac{6 - 4m}{5} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{2}.$$

3. Jouer à ce jeu est une épreuve de Bernoulli de paramètre $\frac{3}{10}$. On joue n fois, les épreuves de Bernoulli sont identiques et indépendantes. La variable aléatoire Z qui compte le nombre de succès au cours de ce schéma de Bernoulli suit la loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{3}{10}$.

$$P(Z \geq 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - P(Z = 0), \text{ puisque}$$

$$Z(\Omega) = \{0; n\}. \text{ Ainsi, } P(Z \geq 1) = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n.$$

On a $P(Z \geq 1) > 0,999$ si et seulement si

$$1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n > 0,999, \text{ soit si et seulement si}$$

$$\left(\frac{7}{10}\right)^n < 0,001. \text{ Les quantités en jeu étant}$$

strictement positives et la fonction logarithme népérien étant strictement croissante sur $]0; +\infty[$, l'inéquation est équivalente à $n \ln \frac{7}{10} < \ln \frac{1}{10^3} \Leftrightarrow n > \frac{-3 \ln 10}{\ln 7 - \ln 10}$. Le change-

ment de sens de l'inégalité est justifié par le fait que l'on divise par $\ln \frac{7}{10}$, < 0 . Le premier

entier strictement plus grand que $\frac{3 \ln 10}{\ln 7 - \ln 10}$

est 20, il faut au moins jouer 20 fois.

Somme de variables aléatoires p. 69

Sujet 1.

En suivant l'indication de l'énoncé, on écrit que $X = \sum_{i=1}^n X_i$. Par ailleurs, pour tout entier naturel i compris entre 1 et n , $X_i = 1$ si et seulement si $Y_i = \frac{X_i + 1}{2} = 1$, et $X_i = -1$ si et seulement

si $Y_i = \frac{X_i + 1}{2} = 0$. On en déduit que $P(X_i = 1) = P(Y_i = 1) = p$ et $P(X_i = -1) = P(Y_i = 0) = 1 - p$. La variable Y_i est donc la variable de Bernoulli de paramètre p . Les variables Y_i sont mutuellement indépendantes puisque les X_i le sont.

Soit la variable Y définie par $Y = \sum_{i=1}^n Y_i$. La variable Y est la somme de n variables indépendantes de Bernoulli de même paramètre p . Ainsi, Y suit la loi binominale de paramètres n et p . On en déduit que $Y(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$.

On a $Y = \sum_{i=1}^n Y_i = \sum_{i=1}^n \frac{X_i + 1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n X_i + \frac{n}{2} = \frac{X}{2} + \frac{n}{2}$, soit $X = 2Y - n$. L'ensemble des valeurs prises par X est donc l'ensemble $\{2k - n, k \in \llbracket 0; n \rrbracket\}$

$= \{-n; 2-n; 4-n; \dots; n-4; n-2; n\}$.

Quel que soit $x \in X(\Omega)$, il existe $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $x = 2k - n$, et :

$$P(X=x) = P(X=2k-n) = P(Y=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Ainsi, on obtient la loi de X :

Quel que soit $x \in X(\Omega)$,

$$P(X=x) = \binom{n}{\frac{x+n}{2}} p^{\frac{x+n}{2}} (1-p)^{\frac{x+n}{2}}$$

S'agissant de l'espérance de X , il serait extrêmement maladroit d'utiliser la loi de X pour l'obtenir, on peut contourner la difficulté de deux manières :

- $E(X) = E(2Y - n) = 2E(Y) - n$ par linéarité de l'espérance, et comme $E(Y) = np$, on trouve $E(X) = 2(np) - n = n(2p - 1)$.

- Une autre façon de procéder est de calculer $E(X) = -1 \times (1-p) + 1 \times p = 2p - 1$, et d'utiliser

$$\text{que } E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = n(2p - 1).$$

Sujet 2.

1. On a :

$$\sum_{i=1}^n \left(p_i - \frac{\alpha}{n}\right)^2 = \sum_{i=1}^n p_i^2 - 2 \frac{\alpha}{n} \sum_{i=1}^n p_i + n \frac{\alpha^2}{n^2}$$

$$= \sum_{i=1}^n p_i^2 - 2 \frac{\alpha^2}{n} + \frac{\alpha^2}{n} = \sum_{i=1}^n p_i^2 - \frac{\alpha^2}{n}$$

2. Comme chaque variable X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre p_i , on a $E(X_i) = p_i$ et $V(X_i) = (0 - p_i)^2 \times (1 - p_i) + (1 - p_i)^2 \times p_i$

$$= p_i(1 - p_i).$$

Par ailleurs, les variables sont indépendantes, donc :

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) = \sum_{i=1}^n p_i(1 - p_i) = \sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^n p_i^2 = \alpha - \sum_{i=1}^n p_i^2$$

3. La formule précédente montre que la variance est maximale lorsque $\sum_{i=1}^n p_i^2$ est

minimale. Or, $\sum_{i=1}^n p_i^2 = \sum_{i=1}^n \left(p_i - \frac{\alpha}{n}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{n}$, donc $\sum_{i=1}^n p_i^2$ est minimale pour $p_i = \frac{\alpha}{n}$.

La variance de X est maximale pour les p_i tous égaux à $\frac{\alpha}{n}$. La loi de X est alors la loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{\alpha}{n}$.

Concentration, loi des grands nombres p. 69

Sujet 1. Application directe

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev dit que si X suit une loi d'espérance m et de variance σ , alors quel que soit $x > 0$,

on a $P(|X - m| \geq x) \leq \frac{\sigma^2}{x^2}$. Ici, il s'agit d'une application directe de la formule :

$$P(|X - 50| \geq 75) \leq \frac{25}{75^2}, \text{ soit } P(X \geq 125) \leq \frac{4}{100}$$

puisque X est à l'évidence une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.

Sujet 2. Intervalle de confiance obtenu avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev

1. S_n est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p . On sait donc que S_n suit la loi binomiale de paramètres n et p . La variable S_n compte le nombre de réponses favorables à A au cours du sondage. Ainsi, $\bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$ est la moyenne des réponses favorables à A au cours du sondage.

On sait que $E(S_n) = np$ et $V(S_n) = np(1-p)$. Ainsi, $E\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{E(S_n)}{n} = p$ et $V\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{V(S_n)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$.

2. C'est clair, la fonction $f : x \mapsto x(1-x)$ est un polynôme du second degré, de coefficient dominant $a = -1 < 0$. Elle est donc croissante

sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right[$. Par

ailleurs, les racines du polynôme sont 0 et 1, et le signe de $f(x)$ est l'opposé de celui de $a = -1$ à l'intérieur des racines. On en déduit que quel que soit $x \in]0; 1[$, $0 < f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

3. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour tout $t > 0$, on a

$$P\left(\left|\bar{X}_n - E(\bar{X}_n)\right| \geq t\right) \leq \frac{V(X_n)}{t^2},$$

$$\text{soit } P\left(\left|\bar{X}_n - p\right| \geq t\right) \leq \frac{p(1-p)}{nt^2} \leq \frac{1}{4nt^2}.$$

Donc, en passant à l'événement contraire, on a $1 - P\left(\left|\bar{X}_n - p\right| < t\right) \leq \frac{1}{4nt^2}$, autrement dit

$P\left(\left|\bar{X}_n - p\right| < t\right) \geq 1 - \frac{1}{4nt^2}$, soit enfin quel que soit $t > 0$:

$$P\left(\bar{X}_n - t < p < \bar{X}_n + t\right) \geq 1 - \frac{1}{4nt^2}.$$

a. La variable $\bar{X}_{1000}$ est réalisée en

$f = \frac{520}{1000} = 0,52$. L'estimation de p par l'intervalle de confiance est donc $[0,449; 0,591]$.

b. L'amplitude de l'intervalle

$$f - \frac{1}{2\sqrt{0,05n}}; f + \frac{1}{2\sqrt{0,05n}} \text{ est } \frac{1}{\sqrt{0,05n}}.$$

Il suffit donc que $\frac{1}{\sqrt{0,05n}} < \frac{1}{100}$, ce qui

conduit à $n > 200\,000$. Il est évident que le nombre de sondés à recruter est trop élevé pour être économiquement viable pour l'entreprise.

Algorithmique et logique p. 73

Sujet 1. Logique. D'après sujet Bac C, Centres Étrangers, juin 1992

1. Quel que soit $x \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc croissante. On sait que toute suite croissante admet une limite, $+\infty$, si la suite n'est pas majorée ou un réel l si la suite est majorée.

2. Supposons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l . Par définition de la convergence, la suite $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge également vers l . Par ailleurs, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^2 = l^2$ (le produit de deux suites convergentes est une suite convergente dont la limite est le produit des limites) et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n^2 + u_n) = l^2 + l$ (la somme de deux suites convergentes est une suite convergente dont la limite est la somme des limites). Ainsi, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l^2 + l$.

Comme la suite convergente $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ ne possède qu'une seule limite, il est nécessaire que $l = l + l^2$. Donc $l^2 = 0 \Leftrightarrow l = 0$. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, sa limite est nulle.

3. On va démontrer que si une suite est croissante et converge vers 0, alors elle est nécessairement à termes négatifs. En effet, s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p > 0$, alors $n \geq p \Rightarrow u_n \geq u_p$, par croissance de la suite, et il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow \left| u_n \right| \geq \frac{u_p}{2}$, puisque la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Dès que n est plus grand que le plus grand des entiers N et p , on a à la fois $u_n \geq u_p$ et $u_n \leq \frac{u_p}{2}$,

soit $\frac{u_p}{2} \geq u_n \geq u_p$, avec $u_p > 0$, ce qui n'est pas possible. Il n'existe donc pas de rang $p \in \mathbb{N}$ tel que $u_p > 0$, donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 0$.

4. On a montré plus haut que si la suite est convergente alors elle est à termes tous négatifs. Par contraposée, si la suite contient au moins un terme positif alors elle est non convergente, c'est-à-dire divergente. Ce sera notamment le cas si $u_1 = u_0 + u_0^2 > 0$.

5. Supposons que $u_0^2 + u_0 < 0$. Ceci entraîne évidemment que $u_0 \in]-1; 0[$. Par ailleurs, soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque.

Si $u_n \in]-1; 0[$, alors $1 + u_n \in]-1; 0[$ et donc $u_n(1 + u_n) \in]u_n; 0[\subset]-1; 0[$. Si on note P_n la propriété $u_n \in]-1; 0[$, on a montré que P_0 est vraie et que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie. En vertu du principe de récurrence, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. La suite est croissante et majorée, elle est donc convergente et on a vu à la question 2. que sa limite ne peut être que nulle.

Sujet 2. Algorithmique. D'après divers sujets de Bac

1. La variable x contient la valeur approchée à 10^{-2} près par excès de la plus petite solution de l'inéquation $\frac{3}{4 + 6e^{-2x}} \geq \frac{1}{2}$. On a la suite d'équivalences :

$$\begin{aligned} \frac{3}{4 + 6e^{-2x}} \geq \frac{1}{2} &\Leftrightarrow 3 \geq 2 + 3e^{-2x} \Leftrightarrow e^{-2x} \leq \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow x \geq \ln \sqrt{3}. \end{aligned}$$

L'algorithme affiche donc 0,55.

2. On doit éliminer les listes possédant plus de 5 éléments, celles qui possèdent un élément non entier ou plus petit que 1 ou plus grand que 50. Ce programme affiche une liste (ordonnée) de 5 éléments choisis aléatoirement de façon équiprobable et tous distincts parmi 50. En somme, chaque L est un 5-arrangement d'éléments pris parmi 50.

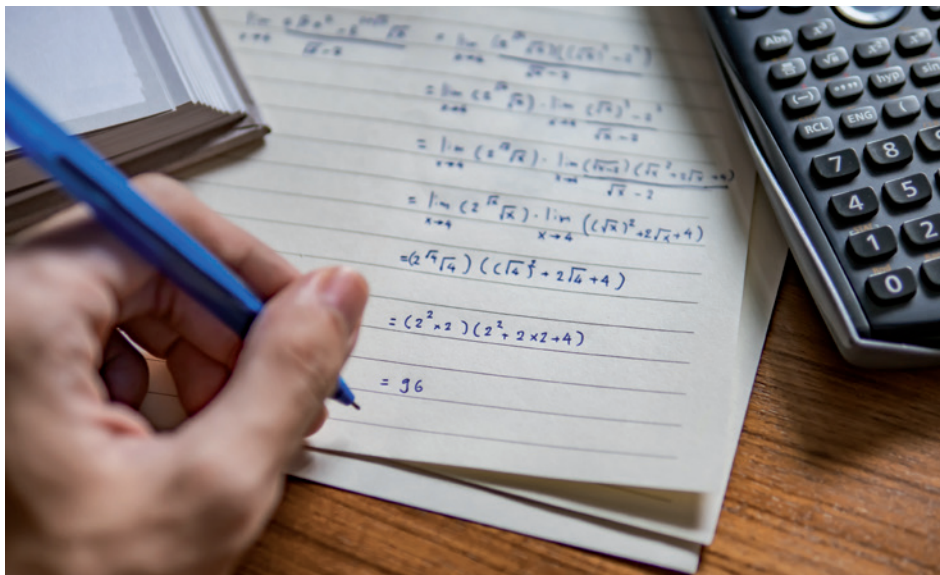
3. La variable C contient le nombre de fois où le tirage aléatoire d'un numéro entre 1 et 7 donne un résultat strictement supérieur à 5 lors de 9 tirages. Ces 9 tirages sont indépendants, ils correspondent à un schéma de Bernoulli où l'événement appelé succès est « Le numéro obtenu est strictement supérieur à 5 ». La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès au cours du schéma décrit plus haut suit la loi binomiale de paramètres $n = 9$ et $p = \frac{2}{7}$ (parmi les 7 entiers entre

1 et 7, il y en a deux strictement plus grands que 5). La variable X est simulée 10 fois `for i in range(10)` : et les 10 simulations sont placées dans la liste L . Cette dernière contient donc 10 simulations de X , soit 10 entiers compris entre 0 et 9 choisis aléatoirement selon la loi binomiale $\mathcal{B}\left(9; \frac{2}{7}\right)$.

LE GUIDE PRATIQUE



Méthodologie et conseils



Présentation de l'épreuve

L'épreuve est composée de **quatre ou cinq exercices**, en fonction des sujets. Chaque exercice est noté entre trois et six points en général, pour qu'ils soient tous de la même importance. Les thèmes sont souvent mêlés dans les différents exercices du sujet, il n'y a donc que très rarement un exercice sur un seul d'entre eux. Il arrive également qu'un même thème soit abordé plusieurs fois dans le sujet, notamment s'il est relié à d'autres dans deux exercices différents.

Description des exercices

Le premier exercice est souvent **un QCM**. La plupart du temps, les réponses à apporter ne nécessitent pas de justification. Cependant, il faudra veiller à bien lire la consigne pour être sûr(e) qu'elle n'est pas exigée. De plus, la notation de chaque question est expliquée dans la consigne de l'exercice (le plus souvent, il y a un point pour une réponse correcte et aucun point pour absence de réponse ou réponse fausse). Enfin, pour chaque question de ce type d'exercice, il faut souvent réaliser des recherches au brouillon pour trouver la réponse correcte.

Tous les autres exercices sont, le plus souvent, composés de **trois à huit questions** qui sont toutes plus ou moins reliées les unes aux autres, il faut donc y répondre dans l'ordre indiqué. Ces exercices sont l'occasion

de montrer vos connaissances sur chaque thème du programme, mais aussi de mettre en lien les différents chapitres travaillés toute l'année.

La gestion du temps

Un sujet de mathématiques n'est pas composé d'un grand nombre de questions, mais chacune d'entre elles (excepté dans le QCM) **demande plusieurs étapes de travail pour obtenir une réponse satisfaisante** par rapport aux exigences de l'épreuve. Vous devez vous préparer à passer entre quarante-cinq minutes et une heure quinze minutes par exercice. Ce temps doit lui-même être découpé en quatre parties à peu près égales : l'analyse et la réflexion sur le sujet, la recherche au brouillon, les calculs et enfin la rédaction des réponses.

La lecture de l'énoncé

Avant de commencer, comptez le nombre de pages du sujet, il doit être conforme à ce qui est indiqué. **Effectuez deux lectures de l'énoncé**. La première, globale, vise à repérer les exercices plus difficiles et à découvrir les notions du cours qui vont être utiles dans le travail attendu. La seconde lecture doit être faite pas à pas en décryptant l'énoncé, en surlignant les informations les plus importantes (celles qu'il ne faut pas oublier) et en notant au

brouillon vos idées pour chaque exercice (vous pouvez prendre une feuille de brouillon par exercice).

La résolution des exercices

Utiliser les bonnes méthodes

Si vous n'arrivez pas à traiter une question, ne vous inquiétez pas et surtout ne vous obstinez pas trop longtemps. Vous risquez de vous énerver et de faire des erreurs dans les questions qui suivent, ainsi que de perdre beaucoup de temps que vous ne pourrez pas rattraper. Laissez donc un bon espace (il ne faut pas que vous manquiez de place si vous revenez traiter cette question) et continuez l'exercice en supposant que le résultat de la question précédente est acquis.

Vérifiez que le texte n'impose pas une méthode, que ce soit dans l'énoncé de l'exercice ou dans une question, en étant attentif à chaque information. Si une méthode est précisée, vous pouvez la surligner sur votre sujet pour ne pas l'oublier lorsque vous chercherez à résoudre la question posée. Par exemple, si on vous demande de démontrer une inégalité par récurrence, utilisez un raisonnement par récurrence pour répondre même s'il existe une autre méthode qui vous semble plus rapide.

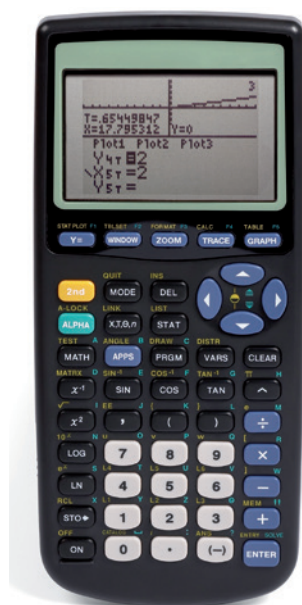
Si vous trouvez un résultat qui vous est demandé dans une question suivante, c'est que vous n'avez pas fait appel à la bonne méthode. Dans ce cas, il faut absolument reprendre la question avec une autre, car vous perdez sinon la logique de l'exercice. Par exemple, si pour prouver que $f(x)$ est supérieur à 3, vous avez choisi de calculer $f'(x)$ alors que ceci est demandé plus loin, vous devez absolument chercher une autre façon de répondre à la question.

Quand vous appliquez un théorème, vérifiez que les hypothèses nécessaires sont réunies pour l'utiliser. De même, vous devez adapter toute formule du cours nécessaire à la résolution, en fonction des données de l'énoncé.

Effectuer les calculs

Il est important de :

- **justifier vos calculs**, sauf si c'est mentionné dans l'énoncé : aucun raisonnement ne peut s'appuyer sur une phrase du type : « D'après la calculatrice, on obtient... » ;
- **vérifier que vos résultats sont vraisemblables** : une probabilité est un nombre



compris entre 0 et 1, une aire est un nombre positif, une fonction numérique ne peut croître vers moins l'infini, etc. ;

- **effectuer tous vos calculs au brouillon**, même si vous n'écrivez pas le détail de toutes les étapes nécessaires, puis rédigez directement sur la copie. Attention à ne pas tout détailler sur votre brouillon, il faut trouver le juste milieu pour ne pas manquer de temps, en vous entraînant pour chaque évaluation écrite de l'année.

Les exercices plus difficiles

On trouve parfois dans la consigne la phrase : « Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation. » Il s'agit le plus souvent d'exercices plus difficiles. Il est alors conseillé de faire les autres exercices avant et de garder ceux-ci pour la fin. Même si vous ne trouvez pas le résultat attendu, si vous avez une piste, voire plusieurs pistes, vous pouvez l'écrire sur votre copie, en soignant la rédaction pour être valorisé(e) sur cette recherche.

Soigner la rédaction et la présentation

L'un des critères d'évaluation de votre copie est la qualité de la rédaction. **Expliquez donc le plus clairement possible** votre raisonnement. Pensez à justifier vos constructions et toutes vos réponses, à chaque étape. Dans le cas d'une fonction, lorsque vous établissez un tableau de valeurs, il faut penser à préciser les limites éventuelles sur l'ensemble de définition et donc les asymptotes de la courbe.

Pour améliorer la lisibilité de votre copie, vous avez intérêt à :

- séparer les questions en sautant des lignes ;
- donner un titre, si possible, à chaque question, au moins à chaque exercice ;
- sauter le double de lignes entre deux exercices (vous pouvez même changer de

page pour une lecture encore plus fluide du correcteur) ;

- encadrer toutes vos réponses et souligner vos résultats intermédiaires lorsque vous rédigez une question plus longue.

Se préparer de façon efficace

La préparation de l'épreuve commence dès les premières semaines de l'année. En effet, l'organisation de votre travail, la rigueur et les bonnes méthodes ne peuvent se trouver le dernier mois. Vos méthodes de révisions et de gestion des évaluations (brouillons, rédaction, etc.) doivent être testées dès le mois de septembre afin de trouver un fonctionnement qui vous convienne. Assurez-vous d'avoir tous les cours de l'année de première et relisez-les régulièrement dès le début de l'année afin d'avoir toujours en mémoire les notions apprises, qui vont servir de fondement pour la classe de terminale.

Demandez à votre professeur des conseils concernant la rédaction de vos copies, afin de l'améliorer progressivement tout au long de l'année. La semaine de bac blanc vous servira à vivre un entraînement précis (avec la charge de travail et la fatigue). Pour vous y préparer, réalisez un planning de révisions pour les deux semaines qui le précèdent, afin de voir ce que vous arrivez à fournir comme travail dans ces périodes et ainsi pouvoir en tirer des enseignements pour la conception de votre planning de révisions de fin d'année.

ZOOM SUR...

L'ÉPREUVE EN BREF

Mois de mars

4 h

Coefficient 16

VIGILANCE POUR CERTAINES NOTIONS !

La difficulté principale de la géométrie dans l'espace repose sur les problèmes de représentation et de visualisation des situations que vous rencontrez. Il faudra être attentif à la bonne compréhension des notions et multiplier les schémas pour visualiser et réussir ces exercices.

Les fonctions sont des problèmes qui associent de nombreuses notions travaillées et vous risquez de vous perdre dans la multitude de connaissances. En effet, la plupart des exercices du baccalauréat sur le thème des fonctions sont découpés en plusieurs parties, et abordent ainsi plusieurs chapitres se ramenant à

ce thème, ainsi que des chapitres du programme de première (comme celui sur la fonction exponentielle). Le calcul intégral et les équations différentielles sont des parties épineuses de ce thème, car elles nécessitent des résolutions abstraites afin de les appliquer à des problèmes concrets. Concernant les probabilités, il faut prendre garde au chapitre concernant la loi des grands nombres et la formule de concentration. Il s'agit d'une nouveauté du programme qui est très abstraite. Il est compliqué de comprendre leur origine et leur usage pour s'appropriier les formules et les utiliser à bon escient.

Enfin, pour ce qui concerne la programmation, le langage Python nécessite de l'entraînement sur ordinateur mais aussi et surtout grâce à des exercices qui utilisent des algorithmes dans des contextes en lien avec d'autres notions du programme.

L'USAGE DE LA CALCULATRICE

Attention, une calculatrice, si perfectionnée soit-elle, ne vous dispense en rien de justifier vos résultats. De plus, le mode examen va être imposé lors des épreuves du baccalauréat, il faut donc que vous utilisiez votre calculatrice avec efficacité. Vous n'aurez pas le temps de prendre en main votre calculatrice le jour de l'épreuve, donc il faut absolument que vous ayez utilisé la même calculatrice pendant toute l'année pour la connaître et ne pas perdre du temps en cherchant des fonctionnalités particulières.

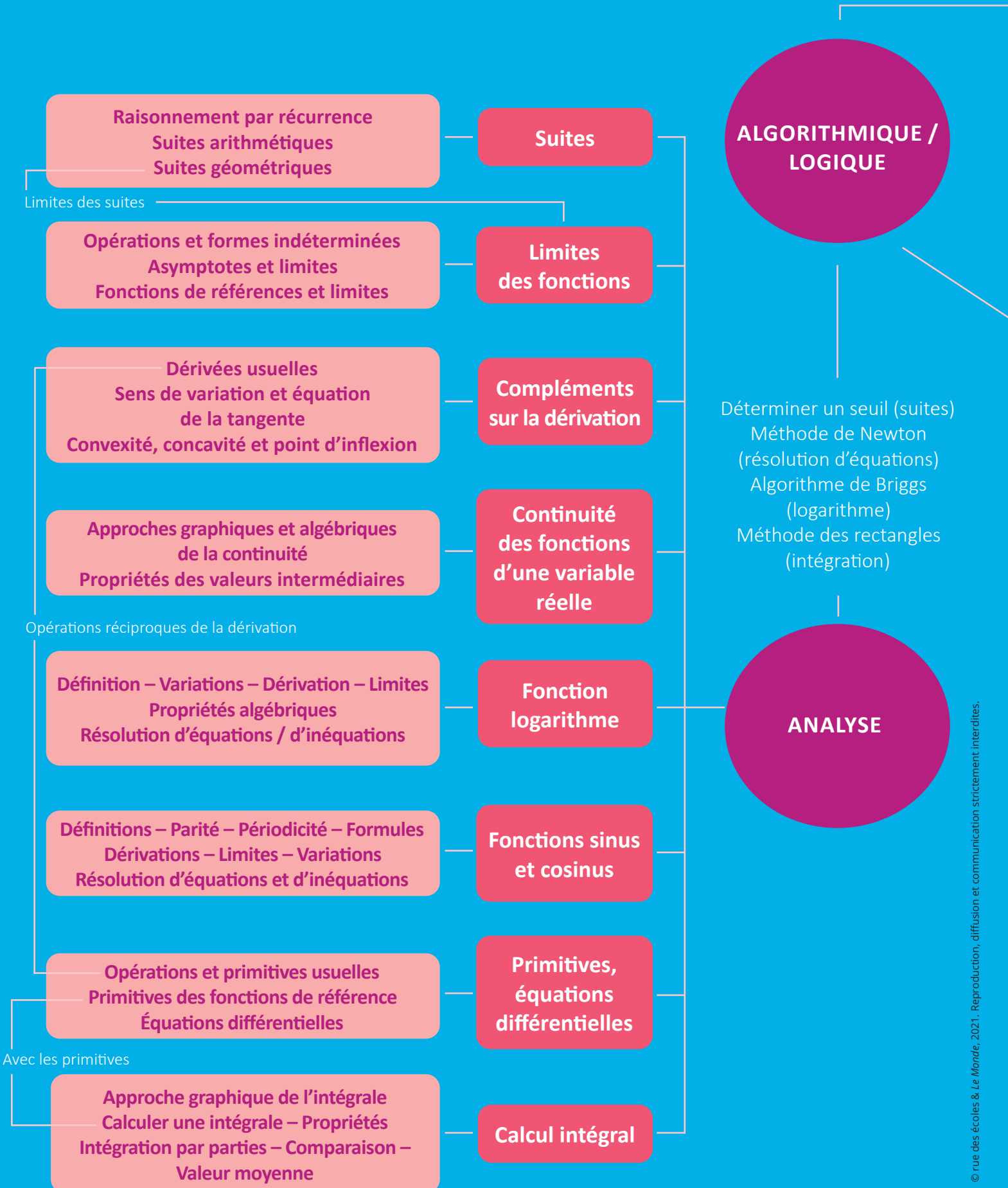
COMPRENDRE LE DÉROULEMENT DES QUESTIONS

Les questions d'un exercice ou d'un problème sont le plus souvent liées les unes aux autres. En particulier, souvenez-vous qu'une question

commençant par « En déduire que... » doit s'appuyer sur le résultat de la question précédente, voire de toutes les questions précédentes. Les questions sont particulièrement dépendantes les unes des autres lorsqu'elles sont subdivisées (1.a, 1.b, 1.c.). Repérez, en lisant toutes les questions d'un exercice, si l'une d'entre elles donne la réponse à une autre.

Il arrive aussi fréquemment dans les exercices sur les fonctions que, dans la partie A, on demande d'étudier une première fonction f et que, dans la partie B, on demande d'étudier une autre fonction g en utilisant les résultats obtenus dans la partie A (par exemple : le signe de la dérivée g' dépend du signe de la fonction f obtenu dans la partie A).

Mathématiques : la synthèse du programme



Simuler une variable aléatoire
Méthode de Monte Carlo
Recherche de seuils

PROBABILITÉS

Succession d'épreuves indépendantes

Espérance – Variance

Sommes de variables aléatoires

Concentration, loi des grands nombres

Combinatoire et dénombrement

Manipulation des vecteurs, des droites et des plans dans l'espace

Orthogonalité et distances dans l'espace

Représentations paramétriques et équations cartésiennes

Coefficients binomiaux

Loi de Bernoulli
Loi binomiale

Intervalle de fluctuation
Intervalle de confiance

Indépendance

Somme de deux variables aléatoires
Linéarité de l'espérance
Variables discrètes indépendantes
Échantillon d'une loi de probabilité

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev
Inégalité de concentration
Loi faible des grands nombres

Ensembles finis – Produit cartésien
P-Liste
Arrangements – Permutations – Combinaisons

Caractérisations vectorielles des droites et des plans
Coplanarité – Colinéarité
Base et repère de l'espace
Positions relatives de droites et de plans dans l'espace

Coordonnées d'un vecteur
Étude des positions

Orthogonalité – Produit scalaire – Vecteur normal
Intersections de plans et de droites
Distance entre deux points – Projection orthogonale

Vecteur normal

Représentation paramétrique d'une droite
Équation cartésienne d'un plan
Coordonnées du projeté orthogonal
Systèmes d'équations linéaires

Produit scalaire

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

Simuler une permutation
Simuler une combinaison
Triangle de Pascal

Crédits

Couverture

Contexte technologique © piranka/iStock

Guide pratique

Calculatrice © leminuit/iStock ; © undrey/iStock Tableau © lucadp/iStock ;

Dés © photoman/iStock ; Équations © alvarez/iStock ;

Informatique © mbbirdy/iStock ; Copie © Wachiwit/iStock

EAN : 9782820811257

© rue des écoles - *Le Monde*, 2021

Éditions rue des écoles - 2 ter rue des Chantiers - 75005 Paris

Achevé d'imprimer en France par Aubin, en décembre 2020

Dépôt légal : janvier 2021



ÊTRE ASSUREUR MILITANT AUJOURD'HUI C'EST :

Favoriser **l'accès à l'éducation** et proposer des outils éducatifs gratuits **pour tous**, soutenir le monde associatif et agir pour l'inclusion, accompagner tous les **bénévoles** et éducateurs qui rendent possible la pratique du sport, mettre **l'humain au cœur** de toutes nos actions et de tous nos choix.

#ChaqueActeCompte

www.chaqueactecompte.fr



assureur militant

Réviser son bac
avec *Le Monde*

CAHIER
SPÉCIAL

16 pages pour
se tester avant
le bac

Testez-vous pour le bac

MATHÉMATIQUES

58 questions
corrigées et commentées

Algèbre et géométrie

Combinatoire et dénombrement

→ Le cours p. 6

Question 1

Combien de menus différents peut-on composer si on a le choix entre 4 entrées, 3 plats et 2 desserts ?

- ☐ A. 9 menus.
- ☐ B. 24 menus.
- ☐ C. 14 menus.
- ☐ D. 26 menus.

Question 2

En informatique, on utilise le système binaire pour coder les caractères. Un bit (*binary digit* ou chiffre binaire) est un élément qui prend la valeur 0 ou la valeur 1. Avec 8 bits (un octet), combien de caractères peut-on coder ?

- ☐ A. $\left(\frac{8}{2}\right)$.
- ☐ B. 8^2 .
- ☐ C. 2^8 .
- ☐ D. $8!$.

Question 3

Une classe de 35 élèves de Terminale doit élire un président, un secrétaire, un trésorier et un suppléant. Combien y a-t-il de possibilités ?

- ☐ A. $\left(\frac{35}{4}\right)$.
- ☐ B. 4^{35} .
- ☐ C. 35^4 .
- ☐ D. $35!$.
- ☐ E. $35 \times 34 \times 33 \times 32$.

Question 4

En début d'année, une classe de 35 élèves de Terminale doit effectuer les photos individuelles pour constituer le trombinoscope. Combien existe-t-il d'ordre de passage possible ?

- ☐ A. 35^2 .
- ☐ B. 35^{35} .
- ☐ C. 35.
- ☐ D. $35!$.
- ☐ E. 35×34 .

Manipulation des vecteurs, des droites et des plans de l'espace

→ Le cours p. 8

Question 5

On considère un cube ABCDEFGH avec I, J, K et L les milieux respectifs de [BC], [GH], [AD] et [EH].

Déterminer la combinaison linéaire de AB, AD et AE égale à BJ.

- ☐ A. $\text{BJ} = \text{AB} + \text{AD} - \frac{1}{2}\text{AE}$.
- ☐ B. $\text{BJ} = \text{AB} - \frac{1}{2}\text{AD} + \text{AE}$.
- ☐ C. $\text{BJ} = -\frac{1}{2}\text{AB} + \text{AD} + \text{AE}$.
- ☐ D. $\text{BJ} = \text{AB} + \text{AD} + \text{AE}$.

Question 6

Soit ABCDEFGH un parallélépipède et

I le point défini par $\text{BI} = \frac{1}{3}\text{BD} + \frac{1}{3}\text{BE}$.

Quel point appartient à la droite (AI) ?

- ☐ A. E.
- ☐ B. F.
- ☐ C. G.
- ☐ D. H.
- ☐ E. D.

Question 7

On se situe dans l'espace rapporté à un repère $(O; i, j, k)$.

Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?

☐ A. Les systèmes d'équations

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ x + y - 4z - 6 = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = \frac{7}{3} + t \\ y = \frac{11}{3} + 11t \\ z = 3t \end{cases}$$

représentent la même droite.

☐ B. $5x - y = 8$ est l'équation d'une droite.

☐ C. Le point A de coordonnées $(4; -3; -2)$ appartient à la droite (D) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 - 5t, t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Question 8

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, on note (P) et (Q) les deux plans d'équations respectives

$$\begin{cases} (P): x - 2z - 3 = 0 \\ (Q): y + z + 5 = 0 \end{cases}$$

Soit (D) la droite d'intersection de (P) et (Q).

Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?

☐ A. La droite (D) admet $u(2; 1; 1)$ comme vecteur directeur.

☐ B. La droite (D) passe par le point $(3; -5; 1)$.

☐ C. Le plan contenant $A(1; 3; -4)$ et (D) a pour équation $-2x + 3y + 7z + 21 = 0$.

Orthogonalité et distances dans l'espace

→ Le cours p. 10

Question 9

Soient $A(1; 2; -1)$, $B(2; -2; 3)$ et

$C(0; -1; 2)$. Parmi les vecteurs suivants, quel est celui qui est normal au plan (ABC) ?

☐ A. $u(1; 0; 0)$.

☐ B. $v(0; 1; 0)$.

☐ C. $w(0; 1; 1)$.

☐ D. $x(1; 1; 0)$.

Question 10

Soient $w(1; 2; 0)$, $x(1,5; 3; 0)$ et $y(4; 2; 0)$ vecteurs normaux respectifs des plans (P), (Q) (R). Les deux plans perpendiculaires sont :

☐ A. P et Q.

☐ B. P et R.

☐ C. Q et R.

Question 11

Soient $A(1; 5; -3)$, $B(3; 9; 3)$, $C(9; 7; -7)$ et I milieu de [BC]. Une mesure (en radians) de l'angle géométrique BAI est environ :

☐ A. 0,89.

☐ B. 0,98.

☐ C. 0,78.

☐ D. 0,87.

Représentations paramétriques et équations cartésiennes

→ Le cours p. 12

Question 12

Dans l'espace rapporté au repère orthonormal $(O; i, j, k)$, on considère les points $P(0; 1; -1)$, $Q(1; 2; 1)$ et $R(1; 1; 1)$. Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?

- ☐ A. L'ensemble des points M tels que $PM \cdot PQ = 3$ est un plan normal à PQ .
- ☐ B. PQ et PR sont orthogonaux.
- ☐ C. L'ensemble des points M tels que $MP \cdot MQ = 0$ est un plan.

Question 13

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O; i, j, k)$, on considère le plan (P) d'équation cartésienne : $-x + y + 2z - 1 = 0$ et la droite (D) de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + k \\ y = -2 - k, k \in \mathbb{R} \\ z = 4 + 3k \end{cases}$$

Parmi les propositions suivantes, laquelle est vraie ?

- ☐ A. La droite (D') d'équations

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -2 + \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 4 \end{cases}$$

orthogonale à (D) et parallèle à (P) .

- ☐ B. (D) est parallèle à (P) .
- ☐ C. Le plan (P') contenant (D) et parallèle à (P) a pour équation cartésienne : $-x + y + 2z - 5 = 0$.

Analyse

Suites

→ Le cours p. 26

Question 14

Pour tout entier n , on définit la suite (u_n) par : $u_n = 2$ si n est pair, et $u_n = -2$ si n est impair.

La suite (u_n) est-elle une suite géométrique ?

- ☐ A. Oui, la suite (u_n) est une suite géométrique.
- ☐ B. Non, la suite (u_n) n'est pas une suite géométrique.

Question 15

À quoi est égal : $1 + 2 + 4 + \dots + 2^n$?

- ☐ A. 2^n .
- ☐ B. $2^n - 1$.
- ☐ C. $1 - 2^{n+1}$.

Question 16

Quelle est la limite de la suite (u_n) définie pour tout n par : $u_n = 0,3 \times 5^n$?

- ☐ A. $-\infty$.
- ☐ B. 0 .
- ☐ C. $+\infty$.

Question 17

Quelle est la limite de la suite (u_n) définie pour tout n par : $u_n = 5 \times 0,3^n$?

- ☐ A. $-\infty$.
- ☐ B. 0 .
- ☐ C. $+\infty$.

Limites des fonctions

→ Le cours p. 28

Question 18

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 2x + 5) = \dots$$

- ☐ A. $-\infty$.
☐ B. $+\infty$.
☐ C. 0.

Question 19

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x(x+2)) = \dots$$

- ☐ A. $+\infty$.
☐ B. 0.

Question 20

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 2x + 5) = \dots$$

- ☐ A. $-\infty$.
☐ B. $+\infty$.
☐ C. 0.

Question 21

Soit f la fonction définie pour tout réel

$$x \neq 2 \text{ par : } f(x) = \frac{1}{x-2}.$$

Quelle affirmation est correcte ?

- ☐ A. La courbe représentative de la fonction f n'admet pas d'asymptote.
☐ B. La courbe représentative de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $y = 2$.
☐ C. La courbe représentative de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

Question 22

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \cos x) = \dots$$

- ☐ A. Il n'y a pas de limite.
☐ B. 0.
☐ C. $+\infty$.

Compléments sur la dérivation

→ Le cours p. 30

Question 23

Soit f la fonction définie pour tout réel $x \neq 2$ par : $f(x) = \frac{x}{x-2}$.

À quoi est égale la dérivée f' de la fonction f ?

- ☐ A. $x \mapsto \frac{2}{(x-2)^2}$.
☐ B. $x \mapsto \frac{2}{(x-2)^2}$.
☐ C. $x \mapsto \frac{2x-2}{(x-2)^2}$.

Question 24

On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{-2x+1}$. Elle est définie, continue et dérivable sur l'ensemble des réels.

À quoi est égale la dérivée f' de la fonction f ?

- ☐ A. $x \mapsto e^{-2x+1}$.
☐ B. $x \mapsto -2e^{-2x+1}$.
☐ C. $x \mapsto 2e^{-2x+1}$.

Question 25

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(3x+1)$. Elle est définie, continue et dérivable sur $\left] -\frac{1}{3}; +\infty \right[$. À quoi est

égale la dérivée f' de la fonction f ?

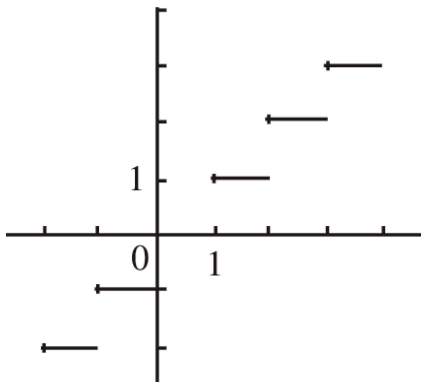
- ☐ A. $x \mapsto (3x+1)e^{3x+1}$.
☐ B. $x \mapsto \frac{1}{3x+1}$.
☐ C. $x \mapsto \frac{3}{3x+1}$.

Continuité des fonctions d'une variable réelle

→ Le cours p. 32

Question 26

On considère la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $I = [-2 ; 4]$.



D'après sa courbe représentative, que peut-on dire ?

- ☐ A. La fonction f est continue sur I .
- ☐ B. La fonction f n'est pas continue sur I .

Question 27

Soit f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = x(2x + 1)$.

Que peut-on dire sur la continuité de la fonction f ?

- ☐ A. On ne sait pas si la fonction f est continue.
- ☐ B. La fonction f est continue sur l'ensemble des réels.
- ☐ C. La fonction f n'est pas continue sur l'ensemble des réels.

Question 28

On considère le tableau de variations d'une fonction continue f .

x	0	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de $f(x)$		↗ ↘	

Combien de solutions admet l'équation $f(x) = 0,5$?

- ☐ A. 2 solutions.
- ☐ B. 1 solution.
- ☐ C. Aucune solution.

Question 29

On considère le tableau de variations d'une fonction f continue et définie sur l'intervalle $]-3 ; 6]$.

x	-3	-2	2	6	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f	0	↗ 1	↘ -1	↗ 2	

Combien de solutions admet l'équation $f(x) = 3$?

- ☐ A. Aucune solution.
- ☐ B. 1 solution.
- ☐ C. Au moins une solution.

Fonction logarithme

→ Le cours p. 34

Question 30

Quelle est la solution de l'équation : $\ln(3x + 1) = 4$?

- ☐ A. Cette équation n'a pas de solution.
- ☐ B. $\frac{e^4 - 1}{3}$.
- ☐ C. $\frac{4 - e^1}{e^3}$.

Question 31

On a : $\ln 3 + \ln 4 + \ln \frac{1}{12} = 0$.

- ☐ A. Faux.
☐ B. Vrai.

Question 32

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln(3x^2 + 1)$. Elle est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. À quoi est égale la dérivée f' de la fonction f ?

- ☐ A. $x \quad (3x^2 + 1)e^{3x^2+1}$.
☐ B. $x \quad \frac{1}{3x^2 + 1}$.
☐ C. $x \quad \frac{6x}{3x^2 + 1}$.

Question 33

On considère la fonction f définie par : $f(x) = 3\ln x$. Elle est définie, continue et dérivable sur l'ensemble des réels strictement positifs. À quoi est égale la dérivée f' de la fonction f ?

- ☐ A. $x \quad \frac{1}{3x}$.
☐ B. $x \mapsto 3\ln x$.
☐ C. $x \quad \frac{3}{x}$.

Fonction sinus et cosinus

→ Le cours p. 36

Question 34

Quelle est la dérivée de la fonction définie par $f(x) = 3\sin(4x + 5)$?

- ☐ A. $x \mapsto 12\cos(4x + 5)$.
☐ B. $x \mapsto 3\cos(4x + 5)$.
☐ C. $x \mapsto -3\cos(4x + 5)$.

Question 35

Quelle est la dérivée de la fonction définie par $f(x) = 3\cos(4x + 5)$?

- ☐ A. $x \mapsto 12\sin(4x + 5)$.
☐ B. $x \mapsto -12\sin(4x + 5)$.
☐ C. $x \mapsto -3\sin(4x + 5)$.

Question 36

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \dots$

- ☐ A. $+\infty$
☐ B. 0.
☐ C. 1.

Question 37

On considère la fonction définie sur l'ensemble des réels par : $f(x) = \sin^2 x + \cos(2x)$. Que peut-on dire de la parité de cette fonction ?

- ☐ A. La fonction f est impaire.
☐ B. La fonction f est paire.
☐ C. La fonction f n'est ni paire ni impaire.

Primitives,
équations différentielles

→ Le cours p. 38

Question 38

La fonction F , définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$F(x) = \frac{-10}{x+2}$, est une primitive de :

- ☐ A. $x \quad \frac{10}{x+2}$.
☐ B. $x \quad \frac{20}{(x+2)^2}$.
☐ C. $x \quad \frac{10}{(x+2)^2}$.

Question 39

Quelle fonction F , définie sur $]0; +\infty[$, est une primitive de la fonction f , définie

$$\text{sur }]0; +\infty[\text{ par } f(x) = \frac{1}{x^2} ?$$

- ☐ A. $x \mapsto \frac{-1+x}{x}$.
- ☐ B. $x \mapsto \frac{-1+2x}{2x}$.
- ☐ C. $x \mapsto \frac{-1+3x}{3x}$.

Question 40

Quelle est la primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2x - 2$ et telle que $F(1) = 0$?

- ☐ A. $x \mapsto x^4 + x^3 - x^2 - 2x$.
- ☐ B. $x \mapsto x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x$.
- ☐ C. $x \mapsto x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + 1$.

Question 41

La fonction f , définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}, \text{ admet pour primitive :}$$

- ☐ A. $x \mapsto \frac{x \ln x}{x^2}$.
- ☐ B. $x \mapsto \frac{x \ln x + 1}{x}$.
- ☐ C. $x \mapsto \frac{x \ln x}{x}$.

Question 42

La fonction f , définie sur $\left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$ par

$$f(x) = \frac{4}{2x+1}, \text{ admet pour primitive :}$$

- ☐ A. $x \mapsto \frac{1}{\ln(2x+1)}$.
- ☐ B. $x \mapsto \ln(2x+1)$.
- ☐ C. $x \mapsto 2\ln(2x+1)$.

Question 43

Quelle est la solution de l'équation $3y + 2y' = 0$, telle que $y(0) = 1$?

- ☐ A. $x \mapsto 2e^{\frac{2}{3}x}$.
- ☐ B. $x \mapsto e^{\frac{3}{2}x}$.
- ☐ C. $x \mapsto 2e^{\frac{3}{2}x}$.

Question 44

Quelle est la solution de l'équation $y' + 2y = 4x$, telle que $y(0) = 0$?

- ☐ A. $x \mapsto e^{-2x} + 2x - 1$.
- ☐ B. $x \mapsto e^{-2x} + x - 2$.
- ☐ C. $x \mapsto e^{-2x} - 2x + 1$.

Calcul intégral

→ Le cours p. 40

Question 45

$$\int_{-2}^2 3 \, dx = \dots$$

- ☐ A. -12.
- ☐ B. 12.

Question 46

$$\int_0^2 3x \, dx = \dots$$

- ☐ A. 12.
- ☐ B. 6.
- ☐ C. 3.

Question 47

$$\int_1^5 \frac{1}{x-1} \, dx = \dots$$

- ☐ A. $\frac{1}{4}$.
- ☐ B. $\frac{2}{3}$.
- ☐ C. $\ln 4$.

Question 48

Déterminer la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = (2x + 3)e^{x^2+3x-1}$, sur l'intervalle $[1; 3]$.

- ☐ A. 3.
☐ B. $\frac{e^{17}}{e^3}$.
☐ C. $\frac{e^{17} \square e^3}{2}$.

Probabilités

Succession d'épreuves indépendantes, schéma de Bernoulli

→ Le cours p. 62

Question 49

En France, le taux d'activité des personnes âgées de 15 à 24 ans est 36,9 %. On choisit au hasard 30 personnes âgées de 15 à 24 ans. En moyenne, dans un groupe, combien y aura-t-il d'actifs ?

- ☐ A. 11.
☐ B. 15.
☐ C. 10.
☐ D. 9.

Question 50

En France, le taux d'activité des personnes âgées de 15 à 24 ans est 36,9 %. On choisit au hasard 30 personnes âgées de 15 à 24 ans. Combien d'actifs sont présents au maximum, dans plus de 90 % des groupes ?

- ☐ A. 13.
☐ B. 14.
☐ C. 12.
☐ D. 11.

Sommes de variables aléatoires

→ Le cours p. 64

Question 51

On considère deux urnes A et B définies ainsi :

- pour l'urne A : on a 20 % de chance de tirer un jeton 10, 50 % de chance de tirer un jeton 20, et 30 % de chance de tirer un jeton 30.
- pour l'urne B : on a 40 % de chance de tirer un jeton 10 et 60 % de chance de tirer un jeton 20.

On prélève un jeton dans l'urne A puis un jeton dans l'urne B, on note X la variable aléatoire égale au nombre obtenu pour l'urne A, et Y la variable aléatoire égale au nombre obtenu pour l'urne B.

Déterminer la seule affirmation incorrecte :

- ☐ A. X et Y sont indépendantes.
☐ B. X et Y sont discrètes.
☐ C. $X(\Omega) = \{10; 20; 30\}$.
☐ D. $Y(\Omega) = \{0,4; 0,6\}$.

Question 52

On considère deux urnes A et B définies ainsi :

- pour l'urne A : on a 20 % de chance de tirer un jeton 10, 50 % de chance de tirer un jeton 20, et 30 % de chance de tirer un jeton 30.
- pour l'urne B : on a 40 % de chance de tirer un jeton 10 et 60 % de chance de tirer un jeton 20.

On prélève un jeton dans l'urne A puis un jeton dans l'urne B, on note X la variable aléatoire égale au nombre obtenu pour l'urne A, et Y la variable aléatoire égale au nombre obtenu pour l'urne B.

L'espérance de $X + Y$ est égale à :

- ☐ A. 21.
- ☐ B. 16.
- ☐ C. 37.
- ☐ D. 25.

Question 53

On considère deux urnes A et B définies ainsi :

- pour l'urne A : on a 20 % de chance de tirer un jeton 10, 50 % de chance de tirer un jeton 20, et 30 % de chance de tirer un jeton 30.
- pour l'urne B : on a 40 % de chance de tirer un jeton 10 et 60 % de chance de tirer un jeton 20.

On prélève un jeton dans l'urne A puis un jeton dans l'urne B, on note X la variable aléatoire égale au nombre obtenu pour l'urne A, et Y la variable aléatoire égale au nombre obtenu pour l'urne B.

La variance de $X + Y$ est égale à :

- ☐ A. 49.
- ☐ B. 24.
- ☐ C. 73.
- ☐ D. 35.

Question 54

On considère deux urnes A et B définies ainsi :

- pour l'urne A : on a 20 % de chance de tirer un jeton 10, 50 % de chance de tirer un jeton 20, et 30 % de chance de tirer un jeton 30.
- pour l'urne B : on a 40 % de chance de tirer un jeton 10 et 60 % de chance de tirer un jeton 20.

L'organisateur décide de doubler les valeurs des jetons de l'urne A et de diminuer les valeurs des jetons de l'urne B de 2 points. On prélève un jeton dans l'urne A puis un jeton dans l'urne B. On note Z la variable aléatoire égale à la somme du nombre obtenu pour l'urne A et du nombre obtenu pour l'urne B. Si l'on joue un très grand nombre de fois à ce jeu, alors, en moyenne, combien de points obtiendra-t-on par partie ?

- ☐ A. 53.
- ☐ B. 54.
- ☐ C. 55.
- ☐ D. 56.

Question 55

On considère deux urnes A et B définies ainsi :

- pour l'urne A : on a 20 % de chance de tirer un jeton 10, 50 % de chance de tirer un jeton 20, et 30 % de chance de tirer un jeton 30.
- pour l'urne B : on a 40 % de chance de tirer un jeton 10 et 60 % de chance de tirer un jeton 20.

On prélève un jeton dans l'urne A puis un jeton dans l'urne B, on note X la variable aléatoire égale au nombre obtenu pour l'urne A. L'organisateur décide de modifier les règles et de quadrupler les valeurs des jetons de l'urne A. On note W la variable aléatoire égale au nombre

obtenu pour l'urne A après la modification des règles.

$V(W) = \dots$

- ☐ A. 784.
- ☐ B. 196.
- ☐ C. 96.
- ☐ D. 384.

Concentration, loi des grands nombres

→ Le cours p. 66

Question 56

Soit X une variable aléatoire discrète. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour $\delta = 3\sigma(X)$, on peut affirmer que :

- ☐ A. Au moins 88,89 % des valeurs de X appartiennent à $]E(X) - 3\sigma(X); E(X) + 3\sigma(X)[$.
- ☐ B. Au moins 89 % des valeurs de X appartiennent à $]E(X) - 3\sigma(X); E(X) + 3\sigma(X)[$.
- ☐ C. Au moins 90 % des valeurs de X appartiennent à $]E(X) - 3\sigma(X); E(X) + 3\sigma(X)[$.

☐ D. Au moins 99,7 % des valeurs de X appartiennent à $]E(X) - 3\sigma(X); E(X) + 3\sigma(X)[$.

Question 57

On lance un dé tétraédrique (4 faces) bien équilibré 1600 fois. Soit X une variable aléatoire discrète correspondant au nombre de 4 obtenus. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on peut affirmer que la probabilité de l'événement $\{365 < X < 435\}$ est supérieure à :

- ☐ A. 77,51 %.
- ☐ B. 79,51 %.
- ☐ C. 75,51 %.
- ☐ D. 81,51 %.

Question 58

Pour simuler le lancer d'un dé à 20 faces, on peut utiliser les listes suivantes :

- ☐ A. valeur=[1,2,...,20] et probabilités=[1/20,1/20,...,1/20].
- ☐ B. valeur=[i for i in range(1,21)] et probabilités=[1/20 for i in range(20)].
- ☐ C. valeur=[i for i in range (1,20)] et probabilités=[1/20 for i in range(20)].
- ☐ D. valeur=[i for i in range (1,20)] et probabilités=[0,05 for i in range(20)].

Algèbre et géométrie

Question 1 : B.

Principe multiplicatif du produit cartésien : $4 \times 3 \times 2$.

Question 2 : C.

On cherche le nombre de 8-listes qu'il existe à partir de l'ensemble $\{0; 1\}$.

Question 3 : E.

On cherche le nombre d'arrangements de 4 éléments de l'ensemble Classe composé de 35 éléments.

Question 4 : D.

On cherche le nombre de permutations de l'ensemble Classe.

Question 5 : C.

$$BJ = BC + CG + GJ = AD + AE - \frac{1}{2}AB.$$

Question 6 : C.

On démontre d'abord que

$$AI = \frac{1}{3}(AB + AD + AE) \text{ puis on remarque que}$$

$$AG = AB + AD + AE.$$

Question 7 : A.

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ x + y - 4z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 - 3z \\ x + y = 4z + 6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3}z + \frac{7}{3} \\ y = \frac{11}{3}z + \frac{11}{3} \end{cases}.$$

En posant $z = 3t$, avec t réel, on obtient :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 \\ x + y - 4z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{3} + t \\ y = \frac{11}{3} + 11t. \\ z = 3t \end{cases}$$

Les autres propositions sont fausses.

Dans l'espace, $5x - y = 8$ est l'équation d'un plan et non celle d'une droite (elle est de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $a = 5$, $b = -1$, $c = 0$ et $d = 8$).

$$A \notin (D), \text{ car le système } \begin{cases} 1 + 3t = 4 \\ 2 - 5t = -3 \\ 3 - t = -2 \end{cases} \text{ équi-}$$

$$\text{vaut à } \begin{cases} t = 1 \\ t = 1 \\ t = 5 \end{cases} \text{ qui n'admet pas de solution.}$$

Question 8 : C.

$$\text{On a } \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y + z + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z + 3 \\ y = -z - 5 \end{cases}.$$

La droite (D) d'intersection des plans (P) et (Q) , admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2k + 3 \\ y = -k - 5 \\ z = k \end{cases}.$$

On en déduit que (D) admet comme vecteur directeur $u(2; -1; 1)$, et non $u(2; 1; 1)$.

$$\text{Si } x = 3, \text{ alors } k = 0 \text{ et on obtient } \begin{cases} x = 3 \\ y = -5 \\ z = 0 \end{cases}.$$

Donc la droite (D) passe par le point de coordonnées $(3; -5; 0)$ et non le point A. $-2x_A + 3y_A + 7z_A + 21 = -2 \times 1 + 3 \times 3 + 7 \times (-4) + 21 = 0$. Donc A appartient au plan d'équation $-2x + 3y + 7z + 21 = 0$.

Par ailleurs, soit M un point quelconque de (D) . Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que :

$$M(2k + 3; -2 - 5; k).$$

$$\text{Or : } -2(2k + 3) + 3(-2 - 5) + 7k + 21 = 0.$$

Donc tout point de (D) appartient au plan d'équation $-2x + 3y + 7z + 21 = 0$.

Question 9 : C.

Car $w \cdot AB = 0$ et $w \cdot AC = 0$. C'est le seul vecteur de la liste vérifiant cela.

Question 10 : B.

On montre que $w \cdot y = 0$.

Question 11 : A.

On arrive à montrer que

$$AB \cdot AI = 28 = AB \times AI \times \cos(\text{BAI}) \\ = \sqrt{56} \times \sqrt{35} \times \cos(\text{BAI}).$$

$$\text{Donc } \cos(\text{BAI}) = \frac{\sqrt{10}}{5}, \text{ soit } \text{BAI} \approx 0,89^\circ.$$

Question 12 : A.

Soit M de coordonnées $(x; y; z)$, on a

$$\text{PM}(x; y-1; z+1), \text{PQ}(1; 1; 2).$$

$$\text{Donc } \text{PM} \cdot \text{PQ} = 3 \Leftrightarrow x + y - 1 + 2z + 2 = 3 \\ \Leftrightarrow x + y + 2z = 2$$

Or $x + y + 2z = 2$ est l'équation cartésienne d'un plan admettant le vecteur $u(1; 1; 2)$ comme vecteur normal.

On remarque que $u = \text{PQ}$. On peut donc affirmer que l'ensemble des points M tels que $\text{PM} \cdot \text{PQ} = 3$ est un plan normal à PQ. Les autres propositions sont fausses.

On a $\text{PQ}(1; 1; 2)$ et $\text{PR}(1; 0; 2)$, donc

$\text{PQ} \cdot \text{PR} = 5$. PQ et PR ne sont donc pas orthogonaux.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\text{MP} \cdot \text{MQ} = 0$ est la sphère de diamètre [PQ].

Question 13 : A.

(D) admet comme vecteur directeur $u(1; 1; 3)$. (D') admet comme vecteur directeur $u'(1; 1; 0)$. On a $u \cdot u' = 0$, donc (D) et (D') sont orthogonales.

$$\text{Le système } \begin{cases} -x + y + 2z - 1 = 0 \\ x = 1 + \lambda \\ y = -2 + \lambda \\ z = 4 \end{cases} \quad \text{n'admet pas}$$

de solution, donc (D') et (P) sont parallèles. Les autres propositions sont fausses.

(D) n'est pas parallèle à (P), car le point $B(0; -1; 1)$ appartient à (D), pour $k = -1$, et à (P).

Il en résulte que le plan (P') ne peut à la fois contenir (D) et être parallèle à (P).

Analyse

Question 14 : A.

Il y a deux cas :

• si n est pair alors $u_n = 2$, et $n+1$ est impair

$$\text{donc } u_{n+1} = -2. \text{ D'où } \frac{u_{n+1}}{u_n} = -1;$$

• si n est impair alors $u_n = -2$, et $n+1$ est

$$\text{pair donc } u_{n+1} = 2. \text{ D'où } \frac{u_{n+1}}{u_n} = -1.$$

Dans tous les cas, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est égal à -1 , donc la suite (u_n) est une suite géométrique de raison -1 .

Question 15 : B.

La somme $1 + 2 + 4 + \dots + 2^n$ est de la forme $1 + q + q^2 + \dots + q^n$, avec $q = 2$. On sait, d'après le cours, que

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

$$\text{Donc } 1 + 2 + 4 + \dots + 2^n = \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} = 2^{n+1} - 1.$$

Question 16 : C.

On a $5 > 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 5^n = +\infty$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Question 17 : B.

On a $-1 < 0,3 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,3^n = 0$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Remarque : le signe du premier terme n'a pas d'importance dans ce cas.

Question 18 : B.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x) = +\infty$, donc par somme,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 + 2x + 5 = +\infty.$$

Question 19 : A.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) = +\infty$, donc par produit,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(x+2) = +\infty.$$

Question 20 : B.

On a une forme indéterminée du type « $\infty - \infty$ ». Pour lever cette forme indéterminée, on va factoriser.

Pour tout réel x non nul, on a :

$$3x^2 - 2x + 5 = 3x^2 \left(1 - \frac{2}{3x} + \frac{5}{3x^2} \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{2}{3x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{3x^2} \right) = 0, \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{3x} + \frac{5}{3x^2} \right) = 1. \text{ Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2) = +\infty,$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 - 2x + 5) = +\infty.$$

Question 21 : C.

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = +\infty, \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = -\infty.$$

Donc la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x = 2$.

Question 22 : C.

Pour tout réel x , $-1 \leq \cos x \leq 1$, donc

$$x + \cos x \geq x - 1. \text{ Or } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty, \text{ donc}$$

d'après le théorème de comparaison, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \cos x) = +\infty$.

Question 23 : A.

La fonction f est du type $\frac{u}{v}$, avec pour tout $x \neq 2$, $u(x) = x$, d'où $u'(x) = 1$, et $v(x) = x - 2$, d'où $v'(x) = 1$. On a donc f' de la forme $\frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Donc pour tout $x \neq 2$,

$$f'(x) = \frac{1(x-2) - 1x}{(x-2)^2} = \frac{-2}{(x-2)^2}.$$

Question 24 : B.

La fonction f définie sur l'ensemble des réels est de la forme e^u , avec $u(x) = -2x + 1$ d'où $u'(x) = -2$. Sa dérivée sera donc de la forme $u'e^u$.

Pour tout réel x , on a $f'(x) = -2e^{-2x+1}$.

Question 25 : C.

La fonction f est du type $\ln u$, avec, pour

$$\text{tout réel } x \in \left] -\frac{1}{3}; +\infty \right[, u(x) = 3x + 1,$$

d'où $u'(x) = 3$. Sa dérivée sera donc de la forme $\frac{u'}{u}$.

$$\text{Pour tout } x \in \left] -\frac{1}{3}; +\infty \right[, \text{ on a donc}$$

$$f'(x) = \frac{3}{3x+1}.$$

Question 26 : B.

Graphiquement, on remarque que la courbe représentative de la fonction f ne peut pas se réaliser sans lever le crayon, donc la fonction f n'est pas continue sur l'intervalle I .

Question 27 : B.

Les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto 2x + 1$ sont des fonctions continues sur l'ensemble des réels, car ce sont des fonctions affines. La fonction f est donc continue sur l'ensemble des réels comme produit de deux fonctions continues sur le même ensemble.

Question 28 : A.

D'après le tableau de variations, on sait que la fonction f admet un maximum lorsque $x = 1$, ce maximum étant égal à 1.

La droite d'équation $y = 0,5$ est située en dessous du point de coordonnées $(1; 1)$. Elle a donc deux points d'intersection avec la courbe représentative de la fonction f .

Il y a donc deux solutions à l'équation $f(x) = 0,5$, l'une appartenant à $]0; 1[$, l'autre appartenant à $]1; +\infty[$.

Question 29 : A.

D'après le tableau de variations de la fonction f , toutes les valeurs prises par la fonction sont inférieures à 2.

3 étant supérieur à 2, l'équation $f(x) = 3$ n'admet pas de solution.

Question 30 : B.

$\ln(3x+1)$ est défini si et seulement si

$$3x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Sur } \left] -\frac{1}{3}; +\infty \right[, \ln(3x+1) = 4 \Leftrightarrow 3x+1 = e^4 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{e^4 - 1}{3}.$$

On vérifie que $\frac{e^4 - 1}{3} \approx 17,9 > -\frac{1}{3}$, donc la solution de l'équation est bien $\frac{e^4 - 1}{3}$.

Question 31 : B.

$$\ln 3 + \ln 4 + \ln \frac{1}{12} = \ln \left(3 \times 4 \times \frac{1}{12} \right) = \ln 1 = 0.$$

L'affirmation est vraie.

Question 32 : C.

La fonction f est du type $\ln u$, avec, pour tout réel x , $u(x) = 3x^2 + 1$, d'où $u'(x) = 6x$. Sa

dérivée sera donc de la forme $\frac{u'}{u}$.

$$\text{Pour tout réel } x, \text{ on a donc } f'(x) = \frac{6x}{3x^2 + 1}.$$

Question 33 : C.

La fonction f est du type $3 \times u$, avec, pour tout réel $x > 0$, $u(x) = \ln(x)$, d'où $u'(x) = \frac{1}{x}$. Sa dérivée sera donc de la forme $3u'$.

$$\text{Pour tout } x > 0, \text{ on a donc } f'(x) = 3 \times \frac{1}{x} = \frac{3}{x}.$$

Question 34 : A.

La fonction f est du type $3 \sin u$, avec, pour tout réel x , $u(x) = 4x + 5$, d'où $u'(x) = 4$. Sa dérivée sera donc de la forme $3u' \cos u$.

Pour tout réel x , on a donc

$$f'(x) = 3 \times 4 \cos(4x + 5) = 12 \cos(4x + 5).$$

Question 35 : B.

La fonction f est du type $3 \cos u$, avec, pour tout réel x , $u(x) = 4x + 5$, d'où $u'(x) = 4$. Sa dérivée sera donc de la forme $-3u' \sin u$.

Pour tout réel x , on a donc

$$f'(x) = -3 \times 4 \sin(4x + 5) = -12 \sin(4x + 5).$$

Question 36 : C.

$$\text{On a : } \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0}.$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \sin'(0) = \cos 0 = 1.$$

(On a utilisé le nombre dérivé de la fonction $\sin$ en 0)

Question 37 : B.

Pour tout réel x , on a :

$$f(-x) = \sin^2(-x) + \cos(-2x) = \sin^2 x + \cos(2x) = f(x), \text{ car la fonction } \cos \text{ est paire. Donc la fonction } f \text{ est paire.}$$

Question 38 : C.

$$\text{On a } F'(x) = -10 \times \left(-\frac{1}{(x+2)^2} \right) = \frac{10}{(x+2)^2}.$$

Question 39 : A.

$$\text{Soit } F(x) = \frac{-1+x}{x}.$$

$$F'(x) = \frac{1 \times x - (-1+x) \times 1}{x^2} = \frac{1}{x^2}.$$

Question 40 : B.

$$\text{On a } F(x) = 4 \frac{x^4}{4} + 6 \frac{x^3}{3} - 2 \frac{x^2}{2} - 2x + c = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x + c.$$

$$\text{Or } F(1) = 1^4 + 2 \times 1^3 - 1^2 - 2 \times 1 + c = c, \text{ donc on a } c = 0 \text{ et } F(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x.$$

Question 41 : B.

$$f(x) = x^{-2} + \frac{1}{x}, \text{ donc une primitive s'écrit}$$

$$F(x) = \frac{x^{-1}}{-1} + \ln x = -\frac{1}{x} + \ln x = \frac{x \ln x - 1}{x}.$$

Question 42 : C.

$$f(x) = 2 \times \frac{2}{2x+1}. \text{ On reconnaît la forme}$$

$$2 \times \frac{u'}{u}, \text{ avec } u(x) = 2x+1.$$

Une primitive est de la forme $2 \ln|u|$, soit

$$F(x) = 2 \ln|2x+1|. \text{ Or sur } \left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[, 2x+1 > 0.$$

$$\text{Donc } F(x) = 2 \ln(2x+1).$$

Question 43 : B.

$$\text{Les solutions de } 3y + 2y' = 0 \Leftrightarrow y' + \frac{3}{2}y = 0$$

sont de la forme $f : x \mapsto \lambda e^{-\frac{3}{2}x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Ici $f(0) = \lambda = 1$, donc la solution est la fonction

$$x \mapsto e^{-\frac{3}{2}x}.$$

Question 44 : A.

La solution générale de l'équation sans second membre $y' + 2y = 0$ s'écrit $y = \lambda e^{-2x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Une solution particulière est $y = 2x - 1$, car $y' + 2y = 2 + (4x - 2) = 4x$.

Alors $y = e^{-2x} + 2x - 1$ est la solution de l'équation donnée.

Question 45 : B.

$$\int_{-2}^2 3x \, dx = \left[3x^2 \right]_{-2}^2 = 3 \times 2 - (3 \times (-2)) = 12.$$

Question 46 : B.

$$\int_0^2 3x \, dx = \left[3 \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 3 \times \frac{2^2}{2} - 3 \times \frac{0^2}{2} = 6.$$

Question 47 : C.

On considère la fonction définie sur l'ensemble des réels $x > 1$ par $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

La fonction F définie sur $]1; +\infty[$ par $F(x) = \ln|x-1| = \ln(x-1)$ est une primitive de la fonction f .

$$\begin{aligned} \text{Donc } \int_2^5 \frac{1}{x-1} dx &= \left[\ln(x-1) \right]_2^5 \\ &= \ln(5-1) - \ln(2-1) \\ &= \ln 4 - \ln 1 = \ln 4. \end{aligned}$$

Question 48 : C.

On remarque que la fonction f est du type $u'e^u$, avec pour tout réel x , $u(x) = x^2 + 3x - 1$, et $u'(x) = 2x + 3$.

Une primitive de f sera de la forme e^u .

La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1; 3]$ est égale à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{3-1} \int_1^3 f(x) dx &= \frac{1}{2} \left[e^{x^2+3x-1} \right]_1^3 \\ &= \frac{1}{2} (e^{3^2+3 \times 3-1} - e^{1^2+3 \times 1-1}) \\ &= \frac{e^{17} - e^3}{2}. \end{aligned}$$

Probabilités

Question 49 : A.

On calcule $E(X) = np = 30 \times 0,369 = 11,07$.

Question 50 : B.

On a exécuté le script, puis tapé dans la console : seuil(30,0.369,0.9).

Question 51 : D.

$$Y(\Omega) = \{10; 20\}.$$

Question 52 : C.

On a $E(X) = 0,2 \times 10 + 0,5 \times 20 + 0,3 \times 30 = 21$, $E(Y) = 0,4 \times 10 + 0,6 \times 20 = 16$. Or on a $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$, donc $E(X+Y) = 37$.

Question 53 : C.

On a $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 0,2 \times 10^2 + 0,5 \times 20^2 + 0,3 \times 30^2 - 21^2 = 49$, et $V(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = 0,4 \times 10^2 + 0,6 \times 20^2 - 16^2 = 24$. Or $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$, car X et Y sont indépendantes. Donc $V(X+Y) = 49 + 24 = 73$.

Question 54 : D.

On a $E(Z) = E(2X + (Y-2)) = 2E(X) + E(Y) - 2 = 2 \times 21 + 16 - 2 = 56$.

Question 55 : A.

On a $V(W) = V(4X) = 4^2 \times V(X) = 16 \times 49 = 784$.

Question 56 : A.

La valeur exacte est $8/9$ soit environ $88,89\%$.

Question 57 : C.

On a utilisé l'inégalité avec $E(X) = 1\,600 \times \frac{1}{4}$,

$$V(X) = 1\,600 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}.$$

Question 58 : B.

Le langage Python ne comprend pas le sous-entendu...

Le « i in range(1,20) » va attribuer successivement à i les entiers de 1 à 20-1 soit 19 !

La notation 0,05 est française et n'est pas comprise par le langage. Il faut écrire 0.05.